2. Courbes dans $\mathbb{R}^3$ (cont.)

Exo Règle de Leibnitz

$$\frac{d}{dt}\left(A(t) \boxtimes B(t)\right) = $$
$$= \frac{d}{dt}A(t) \boxtimes B(t) + A(t) \boxtimes \frac{d}{dt}B(t)$$

Il reste à définir la torsion.

Observons que:

- $\langle B, B \rangle = 1 \Rightarrow \langle B', B \rangle = 0$
- $B' = \cancel{T' \boxtimes N} + T \boxtimes N' = T \boxtimes N' \Rightarrow \langle B', T \rangle = 0$

donc $B' \,/\!/\, N$

• la torsion est la fonction $\tau : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$B' = -\tau N.$$

Invariance par isométries Si $\hat{\gamma} = A \cdot \gamma + b$, $A \in O(3)$, alors

$$\begin{cases} \hat{k} = k \\ \hat{\tau} = (\det A)\, \tau \end{cases}$$

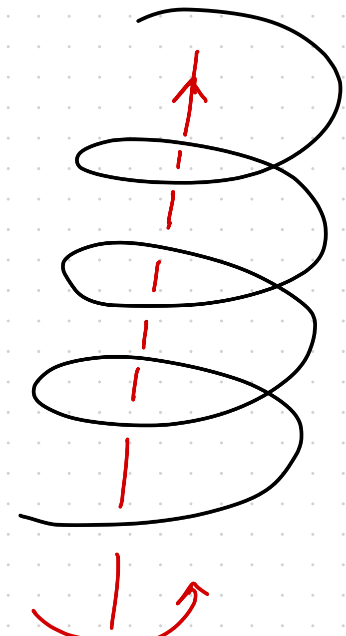
Ex La courbure et la torsion d'une hélice

$$\gamma(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt) \qquad (a,b>0)$$

sont constants.

En fait,

$$\gamma(t_0+s) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in SO(3)} \gamma(t_0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ bs \end{pmatrix}$$



donc k, τ sont constants grâce à l'invariance par isométries.

Théorème (formules de Frénet-Serret, Frénet 1847, Serret 1851)

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe birégulière, alors

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Preuve 1 : on sait déjà que $T' = kN$ et $B' = -\tau N$.

Il reste à vérifier que $N' = -kT + \tau B$.

On a $N = B \boxtimes T$ donc

$$N' = B' \boxtimes T + B \boxtimes T' = -\tau \underbrace{N \boxtimes T}_{-B} + k \underbrace{B \boxtimes N}_{-T}$$

$\square$

__Preuve 2__ : Fixons $t_0 \in I$.

Comme T, N, B est une base orthonormée orientée pour tout t,

$$\begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{pmatrix} \in SO(3).$$

ici T, N, B sont écrits comme des vecteurs lignes

On considère

$$A(t) := \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(t_0) \\ N(t_0) \\ B(t_0) \end{pmatrix}^{-1} \in SO(3)$$

$$\left.\begin{array}{l} A(t_0) = id \\ A(t)^T A(t) = id \end{array}\right\} \Longrightarrow A'(t_0)^T + A'(t_0) = 0$$

i.e. $A'(t_0)$ est anti-symétrique

Or,
$$\begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} T(t_0) \\ N(t_0) \\ B(t_0) \end{pmatrix}$$

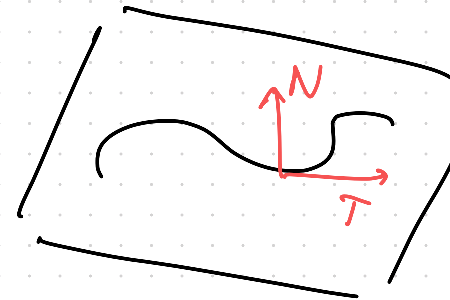
$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} T'(t_0) \\ N'(t_0) \\ B'(t_0) \end{pmatrix} = A'(t_0) \begin{pmatrix} T(t_0) \\ N(t_0) \\ B(t_0) \end{pmatrix}$$

anti-symétrique

On sait déjà que

$$A'(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ * & * & * \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad A'(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

Prop Soit γ est une courbe birégulière.
Alors γ est contenue dans un plan affine de $\mathbb{R}^3$ ("courbe plane") si et seulement si $\tau \equiv 0$.



Preuve

$\Rightarrow$ Soit $P = \{x \mid \langle x, V \rangle = a\}$ le plan qui contient γ.

Alors $\gamma', \gamma'' \in P_0 = \{x \mid \langle x, V \rangle = 0\}$:
en fait, $\langle \gamma(t), V \rangle = a \Rightarrow \langle \gamma'(t), V \rangle = 0 \Rightarrow \langle \gamma''(t), V \rangle = 0$

Donc $B(t) = T(t) \boxed{\times} N(t)$ est constant $\Rightarrow B' = 0 \Rightarrow \tau = 0$.

$\Leftarrow$ si $\tau \equiv 0$, B est constant

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma(t), B \rangle = \langle \gamma'(t), B \rangle = \langle T(t), B \rangle = 0 \Rightarrow \langle \gamma(t), B \rangle = c$$
$$\Rightarrow \gamma(t) \in P := \{x \mid \langle x, B \rangle = c\}.$$

Théorème fondamental de la théorie des courbes dans $\mathbb{R}^3$

Étant données deux fonctions $k: I \to (0,+\infty)$, $\tau : I \to \mathbb{R}$, il existe une courbe birégulière $\gamma : I \to \mathbb{R}$, parametrée par longueur d'arc, ayant courbure k et torsion τ,
La courbe est unique à isométries de $\mathbb{R}^3$ qui préservent l'orientation près : si γ_1 et γ_2 ont courbure k et torsion τ, alors $\gamma_2 = A \circ \gamma_1 + v$ pour $A \in SO(3)$ et $v \in \mathbb{R}^3$.

L'existence et unicité sont conséquence du théorème d'existence et unicité des solutions d'un système linéaire d'EDO, appliquée essentiellement à

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \rightsquigarrow \gamma(t) = \int_{t_0}^{t} T(u)\,du$$

L'unicité peut être demontrée directement. Prenons γ_1 et γ_2. Fixons $t_0 \in I$. Il existe $A \in SO(3)$ telle que

$$A(T_1(t_0)) = T_2(t_0), \quad A(N_1(t_0)) = N_2(t_0), \quad A(B_1(t_0)) = B_2(t_0)$$

On calcule ;

$$\frac{d}{dt}\left(\langle T_1-T_2, T_1-T_2\rangle + \langle N_1-N_2, N_1-N_2\rangle + \langle B_1-B_2, B_1-B_2\rangle\right)$$

$$= 2\left(\langle T_1'-T_2', T_1-T_2\rangle + \langle N_1'-N_2', N_1-N_2\rangle + \langle B_1'-B_2', B_1-B_2\rangle\right)$$

$$= 2\left(k\langle N_1-N_2, T_1-T_2\rangle - k\langle T_1-T_2, N_1-N_2\rangle\right.$$
$$\left.+\ \tau\langle B_1-B_2, N_1-N_2\rangle - \tau\langle N_1-N_2, B_1-B_2\rangle\right) = 0$$

Comme cette fonction vaut 0 en t_0, elle est identiquement nulle $\Rightarrow T_1 \equiv T_2$, $N_1 \equiv N_2$, $B_1 \equiv B_2$

Maintenant,

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\gamma_2(t) - A\cdot\gamma_1(t)\right)} = T_2(t) - T_1(t) = 0$$

cette fonction est constante

$$\Longrightarrow \quad \gamma_2(t) = A\cdot\gamma_1(t) + v \qquad \square$$