5. Orientabilité, opérateur de Weingarten

Étant données deux cartes $F_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^{n+1}$,

on a deux champs vecteurs $N_1 ; F(\Omega_1) \to \mathbb{R}^{n+1}$, $N_2 ; F(\Omega_2) \to \mathbb{R}^{n+1}$.

__Lemme__ $N_1 \equiv N_2$ sur $F_1(\Omega_1) \cap F_2(\Omega_2)$

$$\Longleftrightarrow \det(d(F_2 \circ F_1^{-1})) > 0 \text{ sur } F_1^{-1}(F_1(\Omega_1) \cap F_2(\Omega_2))$$

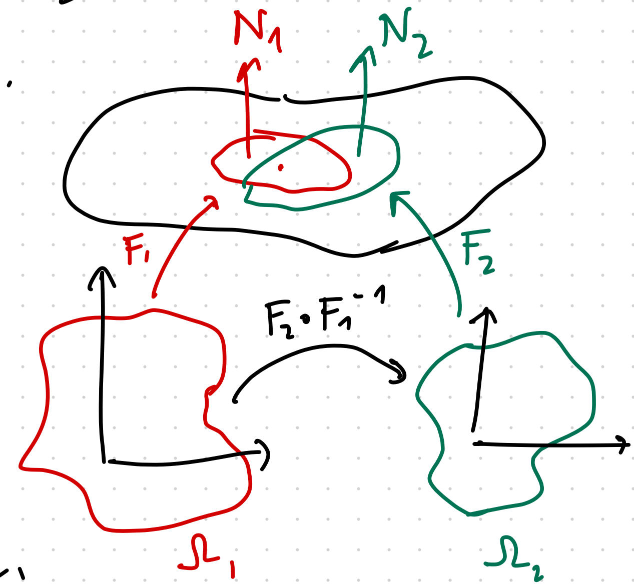
On dit qu'un difféomorphisme local $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ préserve l'orientation si $\forall x \in \Omega$, $\det dF_x > 0$.

Preuve : La matrice de changement de base entre $(dF_1(E_1), \dots, dF_1(E_n), N_1)$ et $(dF_2(E_1), \dots, dF_2(E_n), N_2)$ est de la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right)$$

avec $\lambda = \pm 1$, $N_1 = \lambda N_2$.

$\det M = \lambda \det M_0 > 0$.



Donc $N_1 \equiv N_2 \iff \det M_0 > 0 \iff$ $(dF_1(E_1), \dots, dF_1(E_n))$ et $(dF_2(E_1), \dots, dF_2(E_n))$ ont la même orientation

$\iff dF_2 \circ dF_1^{-1}(E_1), \dots, dF_2 \circ dF_1^{-1}(E_n)$ est positive.

Proposition Soit S une hypersurface.

Il existe un champ vecteurs normal unitaire $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (définit <u>globalement</u>) $\Longleftrightarrow$ il existe une collection de cartes locales $\{ F_i : \Omega_i \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \mid i \in I \}$ telles que :

- $\bigcup_{i \in I} F_i(\Omega_i) = S$
- $\forall i, j \in I$, si $F_i(\Omega_i) \cap F_j(\Omega_j) \neq \emptyset$, alors $F_j \circ F_i^{-1} : F_i(F_i(\Omega_i) \cap F_j(\Omega_j)) \longrightarrow F_j(F_i(\Omega_i) \cap F_j(\Omega_j))$ préserve l'orientation.

On dit alors que S est orientable.

<u>Exemple</u> : Si Σ est définie <u>globalement</u> comme

$$\Sigma = \{ q \in \mathbb{R}^{n+1} \mid G(q) = 0 \}$$

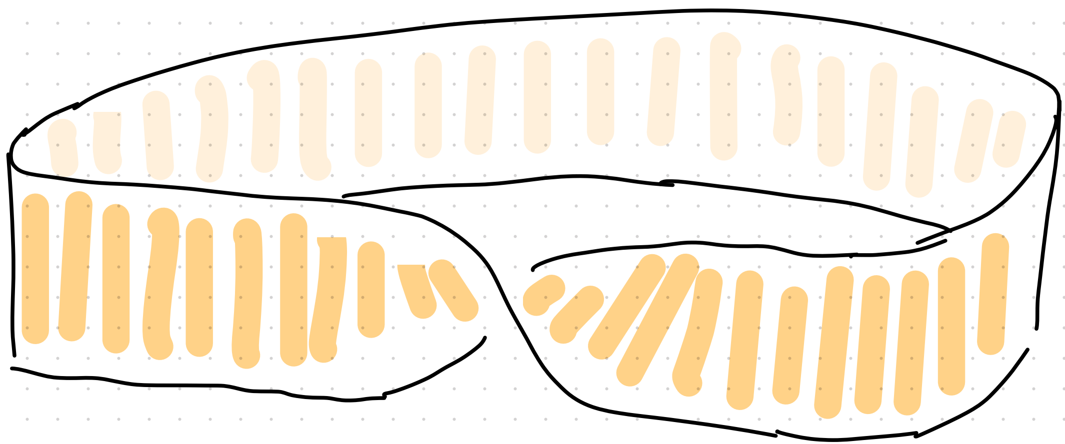
avec $dG_q \neq 0 \quad \forall q \in \Sigma$, alors Σ est orientable.

Au fait, $$N_q = \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(q), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(q) \right)}{\left\| \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(q), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(q) \right) \right\|}$$ est défini <u>globalement</u>

e.g. $\mathbb{S}^2$ est orientable.

Exemple :

Le ruban de Möbius est une surface non orientable



Preuve :

$\Leftarrow$ Pour chaque carte $F_i : \Omega_i \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, on a défini un champ vecteur normal unitaire $N_i : F_i(\Omega_i) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Pour le Lemme, si $F_i(\Omega_i) \cap F_j(\Omega_j) \neq 0$, alors $N_i \equiv N_j$ sur l'intersection

Donc N est défini globalement par $N\big|_{F_i(\Omega_i)} := N_i$.

N est donc un champ vecteur normal unitaire global.

$\Rightarrow$ Soit N un champ vecteur normal unitaire global.

Par déf. de surface, il existe une collection $\{F_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^{n+1} \mid i \in I\}$ telle que $\bigcup_{i \in I} F_i(\Omega_i) = S$.

Fixons $i \in I$. On a donc un N_i sur $F_i(\Omega_i)$, et $N_i = \pm N|_{F_i(\Omega_i)}$

Si $N_i = -N|_{F_i(\Omega_i)}$, on remplace F_i par $F_i \circ R : R^{-1}(\Omega_i) \to \mathbb{R}^{n+1}$, où $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un difféo qui reverse l'orientation.

Maintenant $N_i = N|_{F_i(\Omega_i)}$ pour tout $i \in I$.

Par le lemme, $F_j \circ F_i^{-1}$ préserve l'orientation pour tout $i, j \in I$ si $F_i(\Omega_i) \cap F_j(\Omega_j) \neq \emptyset$.

Operateur de Weingarten

Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ orientable, et soit $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un champ vecteur normal.

L'application $N : S \to \mathbb{S}^n$ est appellée application de Gauss.
On définit l'operateur de Weingarten, ou shape operator, en $p \in S$, qui est une application linéaire

$$B_p : T_pS \longrightarrow T_pS$$

Pour le définir, soit $v \in T_pS$ et soit $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$.

Alors $$B_p(v) := -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\gamma(t)).$$

Il faut vérifier que B est bien défini ;

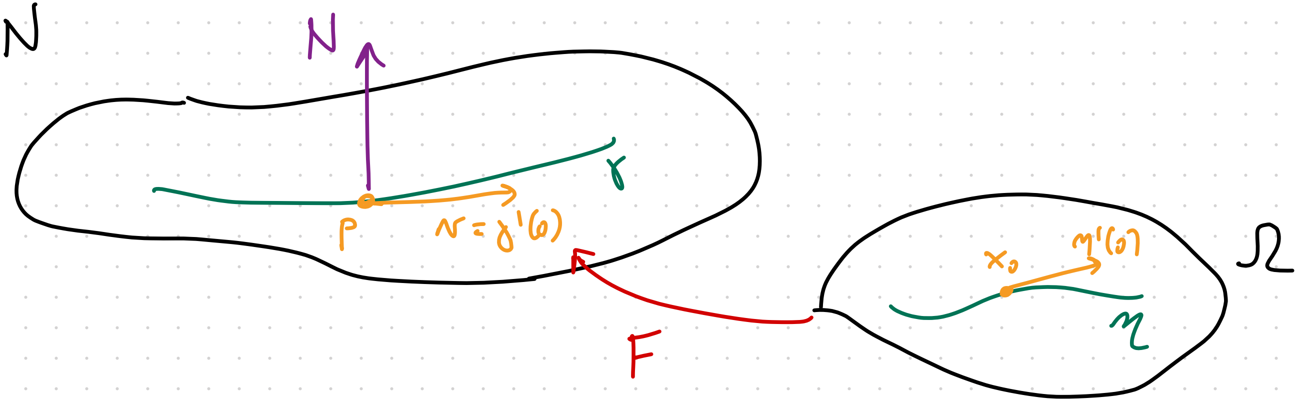
- $B(v)$ ne dépend pas du choix de la courbe γ.

  En fait,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{N\circ F}_{\text{lisse}}(\eta(t)) = d_{x_0}(N\circ F)\circ\eta'(0)$$

$$\overset{!!}{=} \qquad\qquad \text{et} \quad v = dF_{x_0}(\eta'(0)).$$

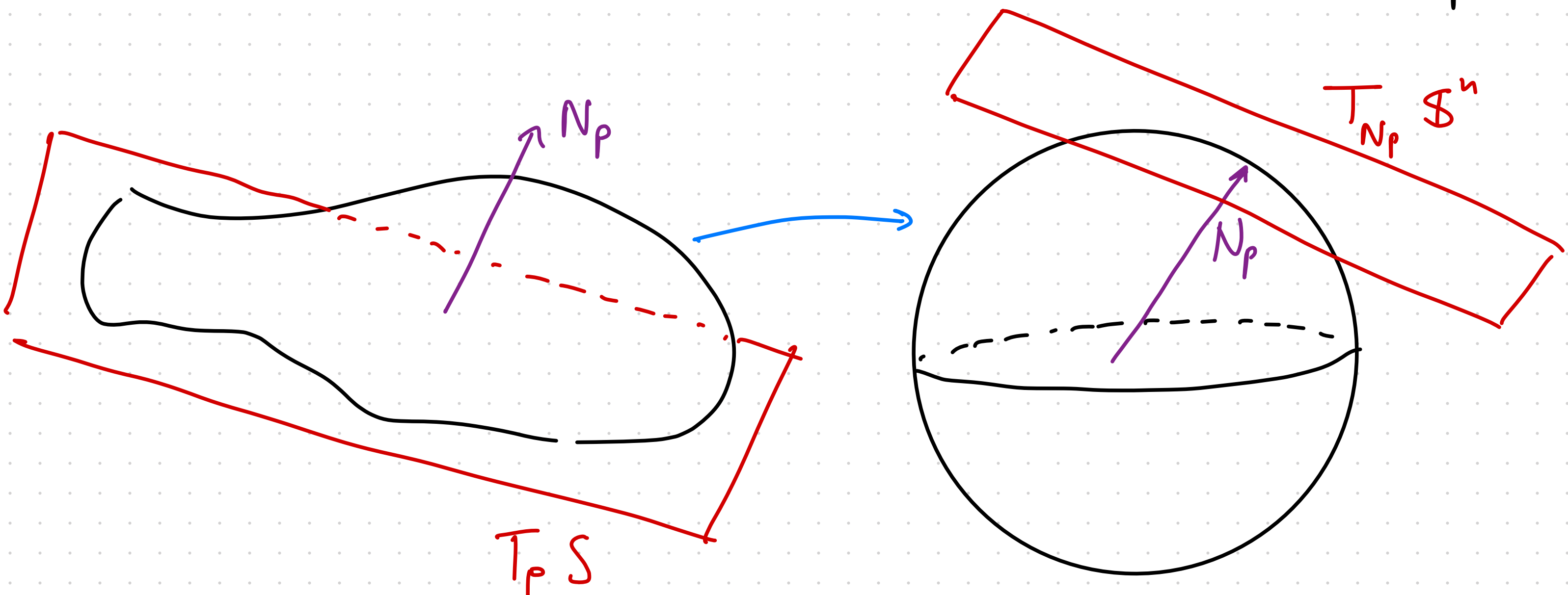
$D_v N$



- $B(v) \in T_p S$

An fact: $\langle N, N \rangle = 1 \Rightarrow \langle D_v N, N \rangle = 0$

$\Rightarrow D_v N \in N_p^\perp = T_p S = T_{N_p} S^n$



Remarques

- Dans une carte F, $F(x_0)=p$, B_p se représente comme

$$v \in \mathbb{R}^n \longrightarrow dF_{x_0}^{-1} \circ B_p \circ dF_{x_0}(v) \in \mathbb{R}^n$$

Si l'on change de carte, pour $\hat{F}$ avec $\hat{F}(\hat{x_0}) = p$, on obtient l'opérateur

$$d\hat{F}_{\hat{x}_0}^{-1} \circ B_p \circ d\hat{F}_{\hat{x}_0} = L \circ (dF_{x_0}^{-1} \circ B_p \circ dF_{x_0}) \circ L^{-1}$$

où $L = d(\hat{F}^{-1} \circ F)_{x_0}$

i.e. B change par conjugaison.

- B est invariant par isométries:

si $\hat{S} = A(S) + c$, $A \in SO(n+1)$, soit $\hat{p} = Ap + c$ alors

$T_{\hat{p}} \hat{S} = A(T_p S)$, $\hat{N}(\hat{p}) = AN(p)$, et donc

$$\hat{B}_{\hat{p}}(Av) = A B_p(v) \qquad \text{i.e.} \quad \hat{B} = ABA^{-1}$$

- Si S change d'orientation, N change de sign donc B change de sign aussi.

si $n=1$, $S=\gamma(I)$ est une courbe dans $\mathbb{R}^2$

Supposons γ paramétrisation par longueur d'arc.

Alors

$$B(\gamma'(t_0)) = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\gamma(t)) = -N'(t_0) = k\,T(t_0) = k\,\gamma'(t_0)$$

$$N' = -kT + \cancel{\tau B}$$

Donc $\boxed{B(v) = k\,v}$

Prop Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface orientable connexe.

$B \equiv 0 \iff S$ est contenue dans un hyperplan affine.

Preuve : $\Leftarrow$ Si $S \subset P = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, V \rangle = c\}$,

$$T_x S = P_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, V \rangle = 0\}$$

donc le vecteur normal $N = \pm V/\|V\|$ est constant $\Rightarrow B \equiv 0$.

$\Rightarrow$ Supposons $B \equiv 0$. Comme $D_v N = 0$, N est constant.

On considère la fonction $f : S \to \mathbb{R}$ $f(x) = \langle x, N \rangle$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \gamma'(t), N \rangle = 0 \quad \text{parce que } \gamma'(t) \in T_x S = N^\perp$$

Donc f est localement constante $\Rightarrow f$ est constante

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \mid S \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, N \rangle = c\}.$$

$\square$

Prop Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface orientable convexe, $\lambda \neq 0$.
$B \equiv \lambda \cdot id \iff S$ est contenue dans une sphère de rayon $\frac{1}{|\lambda|}$

Preuve : $\Leftarrow$ Quitte à une translation, supposons

$$S \subset \frac{1}{|\lambda|} \mathbb{S}^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = \frac{1}{\lambda^2} \}$$

Donc $N(x) = (\pm) \lambda x \Rightarrow B(v) = (\pm) \lambda v$

$\Rightarrow$ On considère $C : S \to \mathbb{R}^{n+1}$ $\quad C(x) = x + \frac{1}{\lambda} N(x)$

$$\frac{d}{dt} C(\gamma(t)) = v - \frac{1}{\lambda} B(v) = v - \frac{1}{\lambda}(\lambda v) = 0.$$

Donc C est localement constant $\Rightarrow$ constant.

Alors $S \subset \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x - C, x - C \rangle = \frac{1}{\lambda^2} \} = \frac{1}{|\lambda|} \mathbb{S}^n + C$. $\square$

6. Première forme fondamentale, aires, intégration

On verra que B est auto-adjoint par rapport à un produit scalaire sur T_pS, donc diagonalisable.

$$B(p) \sim \begin{pmatrix} \lambda_1(p) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(p) \end{pmatrix}$$

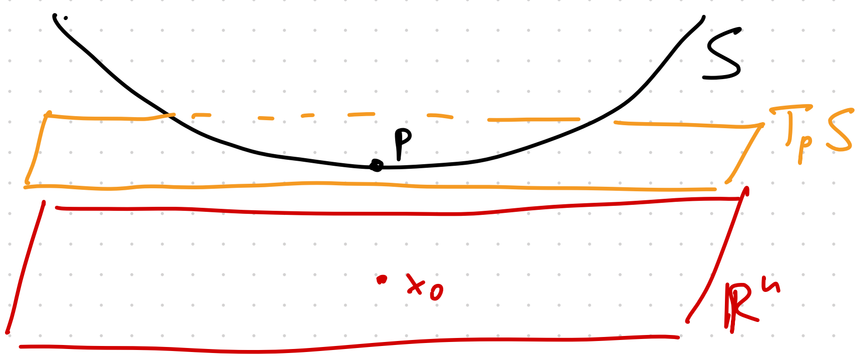
On définit :

- la courbure moyenne $H: S \to \mathbb{R}$ comme $H(p) = \operatorname{tr} B(p)$
$$= \lambda_1(p) + \dots + \lambda_n(p)$$
- la courbure de Gauss-Kronecker $K: S \to \mathbb{R}$ comme $K(p) = \det B(p)$
(ou courbure gaussienne si $n=2$)
$$= \lambda_1(p) \cdots \lambda_n(p)$$
- un point umbilical est un point $p \in S$ tel que
$$B(p) = \lambda \cdot \mathrm{id}_{T_pS}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ce sont tous des invariants par isométrie :

si $F(x) = Ax + v$, $A \in SO(n+1)$, alors $H_{F(S)}(F(p)) = H_S(p)$, et cetera.

__Exemple__ Supposons $S =$ graphe $(f : \Omega \to \mathbb{R})$, avec $df_{x_0} = 0$,



$$N = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)\right\|}$$

$$N(x_0) = (0, \dots, 0, 1)$$

Alors $B_p(E_i) = -\frac{\partial N}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}, 0\right)$

Donc $B_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = \mathrm{Hess}\, f(x_0)$.