6. Première forme fondamentale

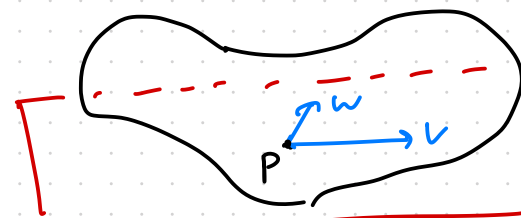
En dimension supérieure, il n'y a pas une notion de paramétrisation par longueur d'arc

$\rightsquigarrow$ pas de paramétrisation "préférée".

Soit S une hypersurface, $p \in S$.

La **première forme fondamentale** de S en p est le produit scalaire

$$T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle$$
$$\overset{\shortparallel}{I(v,w)}$$



On peut décrire la première forme fondamentale par rapport à une carte locale :

$$
\begin{array}{ccc}
F : \Omega & \longrightarrow & S \\
\Psi & & \Psi \\
x_0 & & p
\end{array}
$$

$I(dF(\cdot), dF(\cdot))$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

$$dF_{x_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_p S$$

$$I^F(E_i, E_j) = I(dF(E_i), dF(E_j)) = \langle dF(E_i), dF(E_j) \rangle$$
$$= dF(E_i)^t dF(E_j)$$

Donc la matrice qui représente la première forme fondamentale est $dF^t \cdot dF \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

<u>Rmq</u> • I est invariante par isométries :

si $\hat{S} = AS + c$, $A \in O(n+1)$, $c \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\hat{p} := Ap + c$

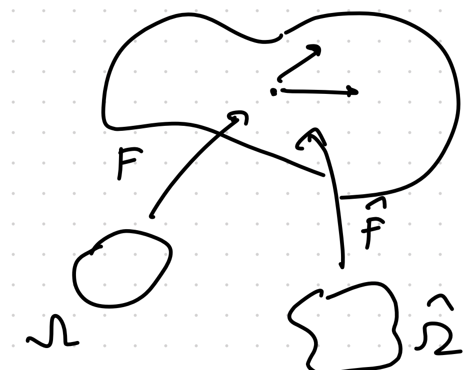
alors $\underset{\substack{\cap \\ T_pS}}{I(v, w)} = \langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle = \underset{\substack{\cap \\ T_{\hat{p}}\hat{S}}}{\hat{I}(Av, Aw)}$

• si on change de carte locale pour S,

$$I^{\hat{F}} = d\hat{F}^{\perp} d\hat{F} = L^T (dF^{\perp} dF) L = L^T I^F L$$

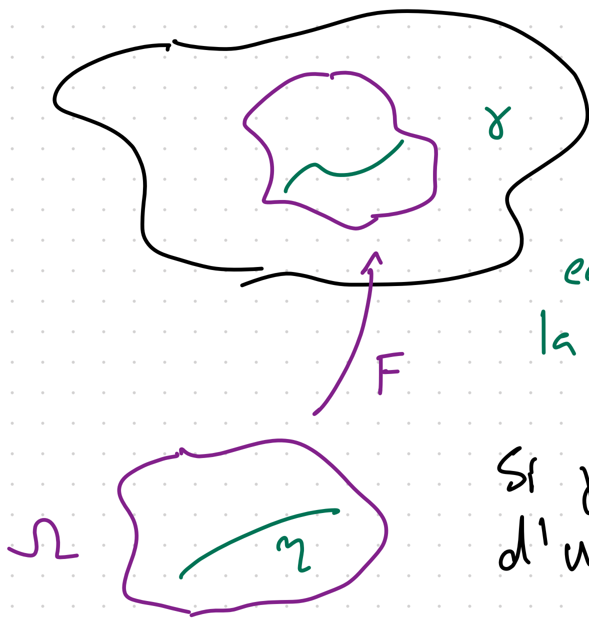
pour $\hat{F} = F \circ (F^{-1} \circ \hat{F})$

$\longrightarrow d\hat{F} = dF \circ \underbrace{(dF^{-1} \circ d\hat{F})}_{= L}$



La première forme fondamentale permet de calculer les longueurs des courbes contenues dans l'hypersurface :

Soit $\eta : I \longrightarrow \Omega$, $\gamma = F \circ \eta : I \longrightarrow S$, $I = (t_0, t_1)$



$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \| \gamma'(t) \| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{< \gamma'(t), \gamma'(t) >} \, dt$$

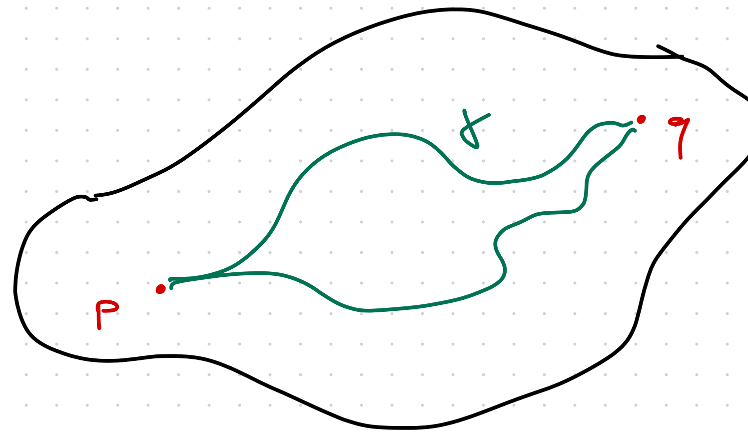
$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I^F(\eta'(t), \eta'(t))} \, dt$$

calculable dans la carte locale

Si γ n'est pas contenue dans l'image d'une seule carte, alors on peut diviser I en des sous-intervalles, On peut alors définir une <u>distance</u> sur S :

$$d^S : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d^S(p,q) = \inf_{\substack{\gamma : [0,1] \to S \\ \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q \\ \gamma \text{ courbe régulière}}} L(\gamma)$$



<u>Rmq</u> Évidemment,

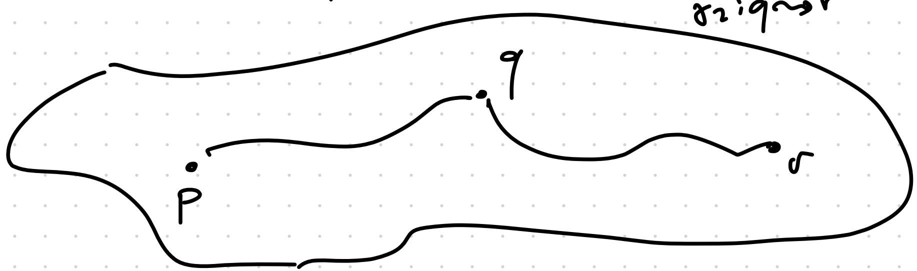
$$d^S(p,q) \geq \| p - q \|$$

d^S définit une structure d'espace métrique sur S :

- $d^S(p,q) = d^S(q,p)$ parce que,
  pour tout $\gamma : [0,1] \to S$ courbe regulière, $\gamma(0)=p, \gamma(1)=q$,
  $\hat{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ est une courbe avec $\gamma(0)=q, \gamma(1)=p$.

- $d^S(p,q) = 0 \iff p=q$ puisque $d^S(p,q) \geq \|p-q\|$

- $d^S(p,r) = \inf\limits_{\gamma : p \rightsquigarrow r} L(\gamma) \leq \inf\limits_{\substack{\gamma_1 : p \rightsquigarrow q \\ \gamma_2 : q \rightsquigarrow r}} (L(\gamma_1) + L(\gamma_2))$



$\leq \inf\limits_{\gamma_1 : p \rightsquigarrow q} L(\gamma_1) + \inf\limits_{\gamma_2 : q \rightsquigarrow r} L(\gamma_2)$

$= d^S(p,q) + d^S(q,r)$.

On va maintenant étudier les applications $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ qui préservent les distances.

<u>Théorème</u> Soient $S, \hat{S} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ deux hypersurfaces, soit $\varphi : S \longrightarrow \hat{S}$ une bijection.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) φ lisse et $\forall p \in S, \forall v, w \in T_pS, \ \hat{I}(d\varphi(v), d\varphi(w)) = I(v, w)$

ii) φ lisse et $\forall p \in S, \forall v \in T_pS, \ \hat{I}(d\varphi(v), d\varphi(v)) = I(v, v)$

iii) φ lisse et $\forall \gamma : I \to S$ courbe régulière, $L(\varphi \circ \gamma) = L(\gamma)$

iv) $\forall p, q \in S \quad d^{\hat{S}}(\varphi(p), \varphi(q)) = d^{S}(p, q)$

On dit alors que φ est une isométrie.

Rmq

- iv) implique que φ est un homéomorphisme.

  en fait, φ est continue ;

  si $p_n \to p$, $d^S(p_n, p) \to 0$, donc $d^{\hat{S}}(\varphi(p_n), \varphi(p)) \to 0$

  $$\Rightarrow \|\varphi(p_n) - \varphi(p)\| \to 0 \Rightarrow \varphi(p_n) \to \varphi(p)$$

  et de la même manière φ^{-1} est continue.

- i) et ii) impliquent que $d\varphi$ est inversible,

  en fait, $d\varphi$ est injective :

  $$d\varphi(v) = 0 \Rightarrow 0 = I^{\hat{S}}(d\varphi(v), d\varphi(v)) = I^S(v, v)$$

  $$\Rightarrow v = 0$$

  $\Rightarrow d\varphi$ isomorphisme.

Preuve ;

i) $\Rightarrow$ ii) trivial

ii) $\Rightarrow$ i) : $I^{\hat{S}}(d\varphi(v+w), d\varphi(v+w)) = I^{S}(v+w, v+w)$

$$\Rightarrow I^{\hat{S}}(d\varphi(v), d\varphi(v)) + I^{\hat{S}}(d\varphi(w), d\varphi(w)) + 2I^{\hat{S}}(d\varphi(v), d\varphi(w))$$

$$= I^{S}(v, w) + I^{S}(w, w) + 2I^{S}(v, w)$$

$$\Rightarrow I^{\hat{S}}(d\varphi(v), d\varphi(w)) = I^{S}(v, w).$$

ii) $\Rightarrow$ iii) trivial

iii) $\Rightarrow$ ii) Supposons $\exists v \in T_pS$ t.q.

$$\|d\varphi(v)\|^2 = I^{\hat{S}}(d\varphi(v), d\varphi(v)) \neq I^S(v,w) = \|v\|^2$$

alors soit $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ avec $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$

soit $f(t) := \int_0^t \|\gamma'(s)\| ds$, $\hat{f}(t) := \int_0^t \|(\varphi \circ \gamma)'(s)\| ds$

$$f'(0) = \|\gamma'(0)\| = \|v\| \neq \|d\varphi(v)\| = \|(\varphi \circ \gamma)'(0)\| = \hat{f}'(0)$$

et $f(0) = \hat{f}(0) = 0$

donc $f(\delta) \neq \hat{f}(\delta)$ pour δ proche de 0

$\Rightarrow$ φ ne préserve pas les longueurs des courbes

iii) $\to$ iv) est trivial

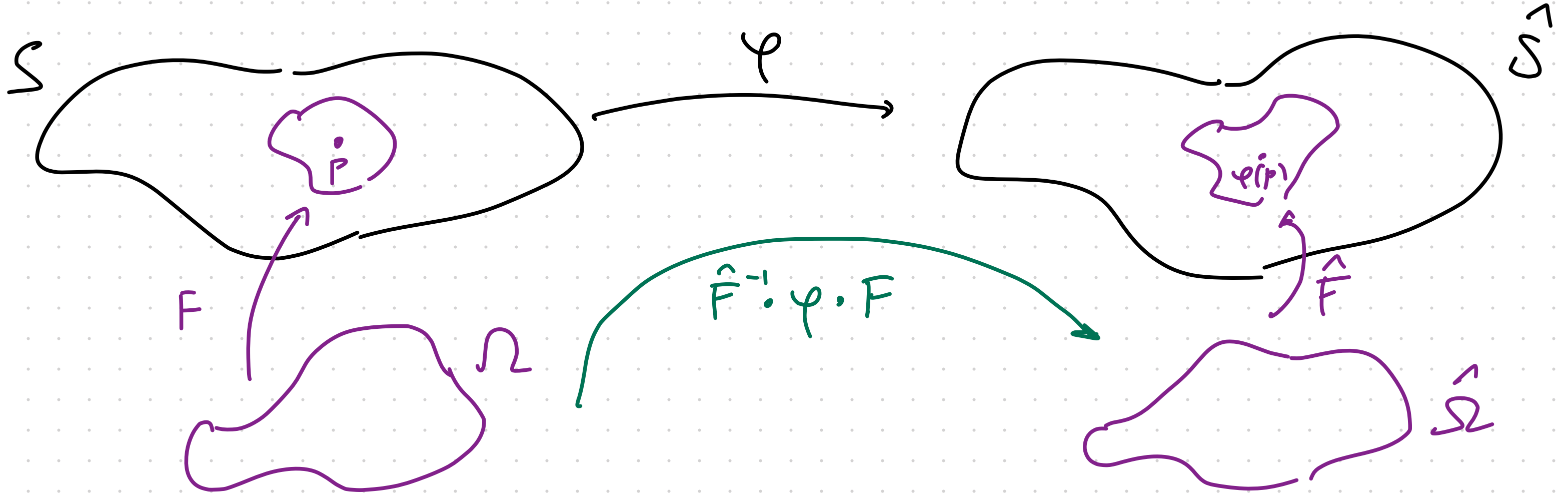
Le fait que iv) soit équivalente à l'une des autres conditions (en particulier, le fait que φ est lisse) est un théorème difficile

(Théorème de Myers-Steenrod)

Rmq Une courbe régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ paramétrée par longueur d'arc est toujours isométrique à un intervalle de la même longueur.

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t,0) \end{aligned}$$

On peut vérifier que φ est une isométrie en cartes:



φ isométrie $\iff \forall p \in S \ \forall v, w \in T_pS \quad \langle d\varphi(v), d\varphi(w)\rangle = \langle v, w\rangle$

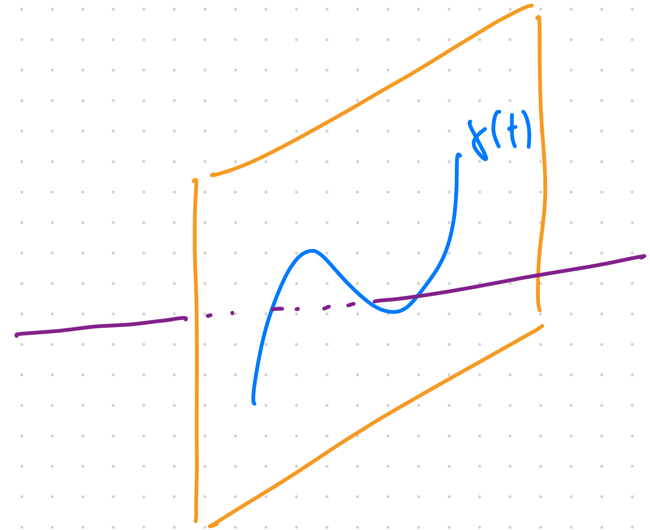
$\iff \forall p \in S$ il existe des cartes $F : \Omega \to S$, $p \in F(\Omega)$,
$\hat{F} : \hat{\Omega} \to \hat{S}$, $\varphi(p) \in \hat{F}(\hat{\Omega})$,

t.q. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $I^{\hat{F}}\left(d(\hat{F}^{-1}\circ\varphi\circ F)(x), d(\hat{F}^{-1}\circ\varphi\circ F)(y)\right) = I^F(x,y)$

Exemple Soient $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^2$ deux courbes régulières paramétrées par longueur d'arc.

Soit $F_i : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$$F_i(u, v) = (\gamma_i(u), v)$$



On a

$$dF_i(E_1) = (\gamma_i'(u), 0)$$
$$dF_i(E_2) = (0, 1)$$

Donc

$$I^{F_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } i = 1, 2.$$

L'application $\varphi : S_1 \to S_2$

$$\varphi(\gamma_1(u), v) = (\gamma_2(u), v)$$

est une isométrie.

L'énoncé du Theorema Egregium

Rappel : on a défini l'opérateur de Weingarten de S

$$B_p : T_pS \longrightarrow T_pS$$

$$B_p(v) = -D_v N = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\gamma(t))$$

où $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^n$ est l'application de Gauss

$\gamma(t)$ courbe régulière contenu dans S

$\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$

Si $n=2$, la courbure gaussienne de S est la fonction $K : S \to \mathbb{R}$

$K(p) = \det(B_p)$ (ne dépend pas du choix de N)

Theorema Egregium de Gauss $n=2$

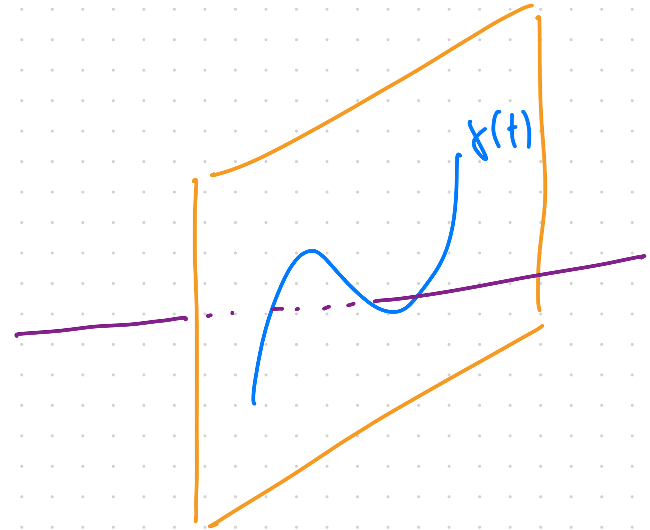
Soient S et $\hat{S}$ deux surfaces dans $\mathbb{R}^3$, et soient $K : S \to \mathbb{R}$, $\hat{K} : \hat{S} \to \mathbb{R}$ les courbures gaussiennes. S'il existe une isométrie $\varphi : S \to S'$, alors $\hat{K} \circ \varphi = K$.

"La courbure gaussienne est un invariant par isométries intrinsèques"

__Exemple__ Soient $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^2$ deux courbes régulières paramétrées par longueur d'arc

Soit $F_i : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$$F_i(u, v) = (\gamma_i(u), v)$$



On a

$$dF_i(E_1) = (\gamma_i'(u), 0)$$
$$dF_i(E_2) = (0, 1)$$

Donc

$$I^{F_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } i = 1, 2.$$

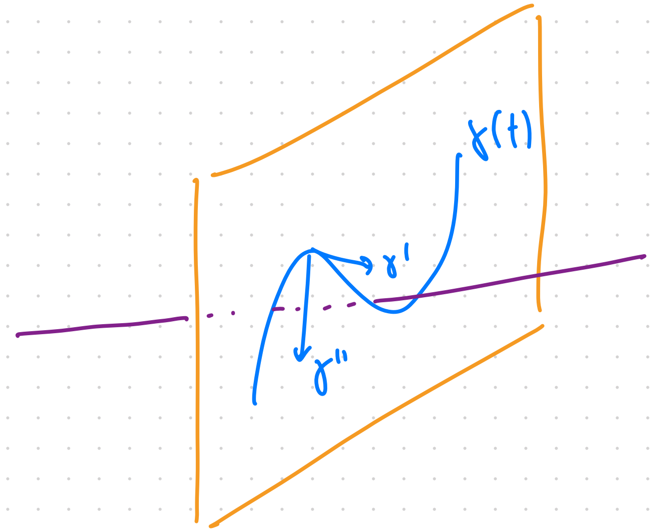
L'application $\varphi : S_1 \to S_2$

$$\varphi(\gamma_1(u), v) = (\gamma_2(u), v)$$

est une isométrie.

Dans cet exemple,

$$N_i(u,v) = \left(\frac{\gamma_1''(u)}{\|\gamma_1''(u)\|}, 0 \right)$$



$$B(E_1) = -dF^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u} N(u,v)\right) =$$

$$= -dF^{-1}(\ \ldots\ , 0) = -(\ldots)\, E_1$$

$$B(E_2) = -dF^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial v} N(u,v)\right) = -dF^{-1}(0) = 0$$

Donc $B = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B \equiv 0$

Cela ne dépend pas du choix de γ !