7. Seconde forme fondamentale

Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hypersurface orientable

Rappel : la première forme fondamentale est le produit scalaire

$$\mathrm{I} : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathrm{I}(v, w) = \langle v, w \rangle$$

On va maintenant introduire la deuxième forme fondamentale

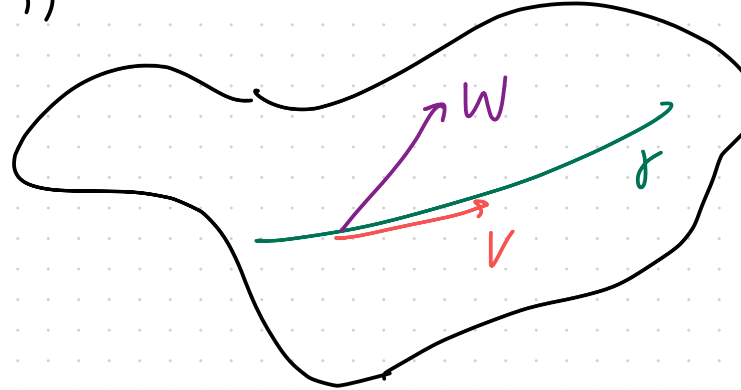
$$\mathrm{II} : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$

Elle sera une forme bilinéaire symétrique, mais en général pas définie positive.

Soit $p \in S$ et soient V, W deux champs vecteurs tangents sur un voisinage $U \subset S$ de p.

On définit : $D_V W := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} W(\gamma(t))$

pour $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ courbe regulière, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = V(p)$



Comme pour la déf de B, $D_V W$ ne dépend que de la valeur de V au point p :

$$D_V W = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((W \cdot F)(\eta(t)) = d_{\eta(0)}(W \cdot F)(\eta'(0))$$

et $\boxed{D_{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2} W = \lambda_1 D_{V_1} W + \lambda_2 D_{V_2} W}$

Maintenant, on décompose

seconde forme fondamentale

$$D_V W = \underbrace{\nabla_V W}_{\in T_pS} + \underbrace{\mathrm{II}(V,W)\,N}_{\in T_pS^\perp}$$

champ vecteur normal unitaire

Donc $\mathrm{II}(V,W) = \langle D_V W, N \rangle$.

Si l'on change d'orientation pour S, N change de sign et donc II change de sign.

Lemme $\mathrm{II}(V,W)$ ne dépend que des valeurs de V et W en p, et II définit une forme bilinéaire symétrique sur T_pS.

Preuve : • On a déjà vu que, si $V_1(p) = V_2(p)$,
alors $(D_{V_1} W)(p) = (D_{V_2} W)(p)$,
donc $\mathrm{II}(V_1, W) = \mathrm{II}(V_2, W)$ en p.

• Il faut montrer que, si $W_1(p) = W_2(p)$, alors $\mathrm{II}(V,W_1) = \mathrm{II}(V,W_2)$ en p

On montre que, si $W(p) = 0$, alors $\mathrm{II}(V,W) = 0$ en p.

On peut écrire $W(F(x)) = dF_x(\underbrace{W_0(x)}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, dF_x(E_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) E_i \quad \text{avec } f_i(x_0) = 0 \ \forall i$$

Donc

$$\langle D_v W, N \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} W(\gamma(t)), N(\gamma(0)) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(\eta(t))\, dF_{\eta(t)}(E_i)\right), N(\gamma(0)) \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f_i(x_0)}_{=0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} dF_{\eta(t)}(E_i), N_{x_0} \right\rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial v}(x_0) \underbrace{\langle dF_{x_0}(E_i), N_{x_0} \rangle}_{=0} = 0$$

$v = \eta'(0)$

- Cela montre immédiatement que II est bilinéaire, parce que $D_{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2} W = \lambda_1 D_{V_1} W + \lambda_2 D_{V_2} W$
  et $\langle D_V(\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2), N \rangle = \mu_1 \langle D_V W_1, N\rangle + \mu_2 \langle D_V W_2, N\rangle$

- Pour montrer la symétrie, il suffit de montrer que

$$\forall i,j \in \{1, \ldots, n\} \quad \mathrm{II}(dF(E_i), dF(E_j)) = \mathrm{II}(dF(E_j), dF(E_i))$$

Mais :

$\eta(t) = x_0 + tE_i$

$$D_{dF(E_i)} dF(E_j) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} dF_{\eta(t)}(E_j) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial F}{\partial E_j}(\eta(t)) = \frac{\partial^2 F}{\partial E_i \partial E_j}(x_0)$$

$\Rightarrow D_{dF(E_i)} dF(E_j) = D_{dF(E_j)} dF(E_i)$ par le Lemme de Schwarz. $\square$

Rélation avec l'opérateur de Weingarten:

Soient V, W champs vecteurs tangents $\Rightarrow \langle W, N \rangle \equiv 0$

Donc $\langle W(\gamma(t)), N(\gamma(t)) \rangle \equiv 0 \qquad (\gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = V(p))$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle W(\gamma(t)), N(\gamma(t)) \rangle =$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} W(\gamma(t)), N(p) \right\rangle + \left\langle W(p), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\gamma(t)) \right\rangle$$

$$= \langle D_V W, N \rangle + \langle W, D_V N \rangle \qquad -B(V)$$

$$= \mathrm{II}(V, W) - \langle W, B(V) \rangle$$

$$\Rightarrow \mathrm{II}(V, W) = \mathrm{I}(B(V), W)$$

$\boxed{\text{Équation de Weingarten}}$

En particulier, B est symétrique par rapport à I :

$$\mathrm{I}(B(V), W) = \mathrm{II}(V, W) = \mathrm{II}(W, V) = \mathrm{I}(V, B(W))$$

Donc $B : T_pS \to T_pS$ est diagonalisable en tout point $p \in S$

$$B(p) \sim \begin{pmatrix} \lambda_1(p) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(p) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de B sont appelées courbures principales.

On définit :

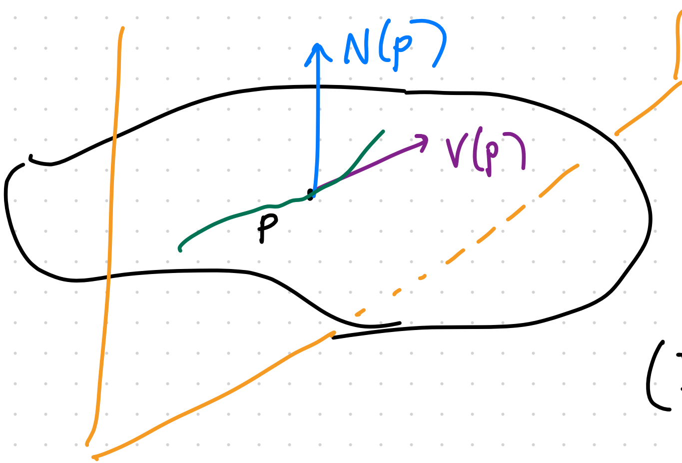
- la courbure moyenne $H : S \to \mathbb{R}$ comme $H(p) = \operatorname{tr} B(p)$
$= \lambda_1(p) + \dots + \lambda_n(p)$
- la courbure de Gauss-Kronecker $K : S \to \mathbb{R}$ comme $K(p) = \det B(p)$
(ou courbure gaussienne si $n = 2$) $= \lambda_1(p) \cdots \lambda_n(p)$
- un point umbilical est un point $p \in S$ tel que
$$B(p) = \lambda \cdot \mathrm{id}_{T_p S}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ce sont tous des invariants par isométrie :
si $\hat{S} = AS + c$, $A \in SO(n+1)$, $c \in \mathbb{R}^{n+1}$
alors $H_{\hat{S}}(Ap + c) = H_S(p)$, et cetera.

Interprétation géométrique de la seconde forme fondamentale

Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hypersurface, $p \in S$.

Soit $V \in T_pS$ unitaire et soit $\mathcal{P} = p + \mathrm{Vect}(V(p), N(p))$



Soit γ la courbe $S \cap \mathcal{P}$, paramétrée par longueur d'arc.

Comme $\gamma \subset \mathcal{P}$,

$$(D_{\gamma'}\gamma')(0) = \underbrace{\gamma''(0)}_{= \pm k_\gamma(p) N(p)} \in \mathcal{P}_0 = \mathrm{Vect}(V(p), N(p))$$

et $\langle \gamma''(0), \gamma'(0) \rangle = 0$

Donc $|\mathrm{II}(V(p), V(p))| = k_\gamma(p)$

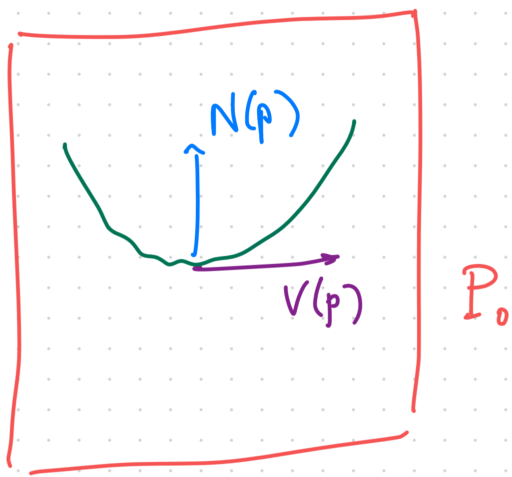
courbure de γ

(Dans ce cas, $(\nabla_{\gamma'}\gamma')(p) = 0$)

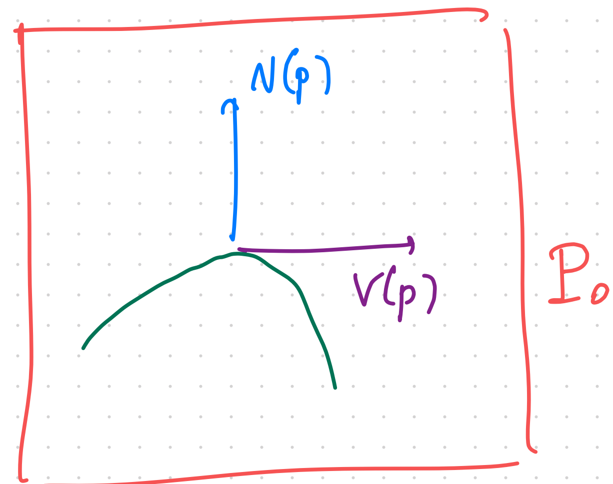
de plus, $\mathrm{II}(V(p), V(p)) = \langle \gamma''(0), N(p) \rangle$

est positif si $\gamma''(0) = \lambda N(p)$, $\lambda > 0$,

négatif si $\gamma''(0) = \lambda N(p)$, $\lambda < 0$



$\mathrm{II}(V, V) > 0$ en p



$\mathrm{II}(V, V) < 0$ en p.

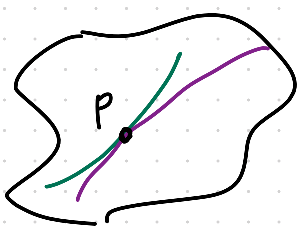
En général, pour $\gamma : I \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ courbe régulière, paramétrée par longueur d'arc,

la courbure normale de γ en $\gamma(0)$ est la quantité

$$\langle \mathrm{II}(\gamma'(0), \gamma'(0)), N(\gamma(0)) \rangle$$

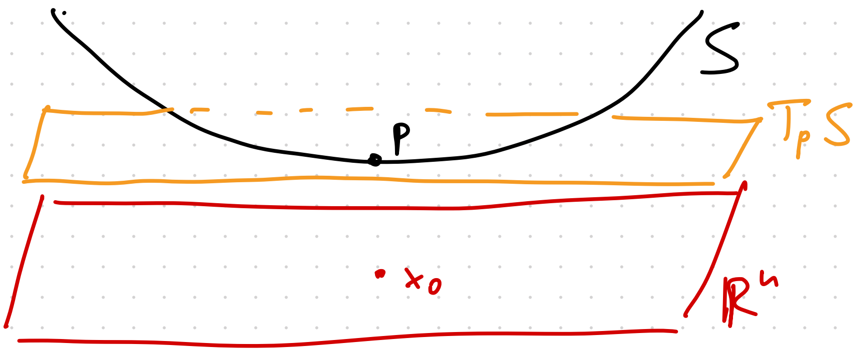
<u>Théorème de Meusnier</u> (1776)

Si deux courbes $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow S$ ont le même vecteur tangent en $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, alors elles ont la même courbure normale en p.



<u>Preuve</u> : $\mathrm{II}(V(p), W(p))$ ne dépend que des valeurs de V et W en p.

Exemple Supposons $S = \text{graphe}\,(f : \Omega \to \mathbb{R})$, avec $df_{x_0} = 0$,



On utilise la carte

$F(x_1, \dots, x_n) =$
$= (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$

Alors $dF(E_i) = (0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_i})$ est la base de T_pS

En x_0, $dF(E_i) = (0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, 0, 0)$

$df_{x_0} = 0$.

La première forme fondamentale par rapport à la base standard est :

$$I^F(E_i, E_i) = \langle dF(E_i), dF(E_i)\rangle = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$$

$$I^F(E_i, E_j) = \langle dF(E_i), dF(E_j)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad i \neq j$$

$$I^F = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{pmatrix} = id + df^T \cdot df$$

en x_0, $I^F(E_i, E_j) = \delta_{ij}$

Le vecteur normal est :

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)\right\|}$$

parce que $\langle N, dF(E_i) \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

et $\langle N, N \rangle = 1$

En particulier, en x_0, $N(x_0) = (0, \ldots, 0, 1)$

La seconde forme fondamentale en x_0 est :

$$\mathrm{II}^F(E_i, E_j) = \langle D_{dF(E_i)}\, dF(E_j), N(x_0) \rangle$$

$$= \langle (0, \dots, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}), (0, \dots, 0, 1) \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Donc $\mathrm{II}^F(x_0) = \mathrm{Hess}\, f(x_0)$.

Si II est définie positive (négative), alors S est convexe (concave) par rapport à N dans un petit voisinage de p.

On peut aussi calculer $B(p)$ directement :

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)\right\|}$$

$$N(x_0) = (0, \dots, 0, 1)$$

Alors $B_p(E_i) = -\frac{\partial N}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}, 0\right)$

Donc $B_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = \operatorname{Hess} f(x_0)$.