8. Connexions et géodésiques

Rappelons que, pour $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hypersurface, V, W champs vecteurs tangents, N champ vecteur normal unitaire,

$$D_V W = \underbrace{\nabla_V W}_{\in T_p S} + \mathrm{II}(V, W) N$$

$\nabla_V W$ est appelée connexion de Levi-Civita de S.

On a déjà vu que $\nabla_V W$ ne dépend que de la valeur de V en p, puisque $D_V W$ ne dépend que de $V(p)$, mais elle dépend de W au voisinage de p.

Elle a les propriétés suivantes:

linéarité en V

1) $\nabla_{V_1+V_2} W = \nabla_{V_1} W + \nabla_{V_2} W$ (en fait, $D_{V_1+V_2} W = D_{V_1} W + D_{V_2} W$)

2) $\nabla_{\lambda V} W = \lambda \nabla_V W$ (en fait, $D_{\lambda V} W = \lambda D_V W$)

3) $\nabla_V (W_1 + W_2) = \nabla_V W_1 + \nabla_V W_2$ (en fait, $D_V(W_1+W_2) = D_V W_1 + D_V W_2$)

4) $\nabla_V (fW) = f \nabla_V W + (D_V f) W$ où $D_V f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t))$

$\gamma(0) = p$

$\gamma'(0) = V(p)$

en effet, $D_V(fW) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) W(\gamma(t)) =$

$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) W(\gamma(0)) + f(\gamma(0)) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W(\gamma(t)) = f(D_V W) + \underbrace{(D_V f) W}_{\in T_p S}$

règle de Leibnitz

5) $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ $\nabla_{dF(E_i)} dF(E_j) = \nabla_{dF(E_j)} dF(E_i)$ ← sans torsion

en fait, on a déjà vu que

$$D_{dF(E_i)} dF(E_j) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = D_{dF(E_j)} dF(E_i)$$

6) $D_v \langle W_1, W_2 \rangle = \langle \nabla_v W_1, W_2 \rangle + \langle W_1, \nabla_v W_2 \rangle$ ← compatibilité avec la première forme fondamentale

en fait, $D_v \langle W_1, W_2 \rangle := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle W_1(\gamma(t)), W_2(\gamma(t)) \rangle =$

$$= \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W_1(\gamma(t)), W_2(\gamma(0)) \right\rangle + \left\langle W_1(\gamma(t)), \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W_2(\gamma(t)) \right\rangle$$

$$= \langle D_v W_1, W_2 \rangle + \langle W_1, D_v W_2 \rangle = \langle \nabla_v W_1, W_2 \rangle + \langle W_1, \nabla_v W_2 \rangle$$

Une application $\nabla : T_pS \times \mathcal{X}(S) \longrightarrow \mathcal{X}(S)$

$\mathcal{X}(S) = \{$ champs vecteurs tangents à $S \}$

qui satisfait 1-2-3-4 est appelée connexion sur S.

Si elle satisfait aussi 5-6, elle est appelée connexion de Levi-Civita de S.

On verra que la connexion de Levi-Civita est unique.

Une connexion est uniquement determinée par $\nabla_{dF(E_i)} dF(E_j)$:

Si $V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, dF(E_i)$, $W = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \, dF(E_j)$, alors

$$\nabla_V W = \nabla_{\sum \lambda_i dF(E_i)} W \overset{1+2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla_{dF(E_i)} W =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla_{dF(E_i)} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \, dF(E_j) \overset{3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \nabla_{dF(E_i)} (\mu_j \, dF(E_j))$$

$$\overset{4)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} dF(E_j) + \mu_j \nabla_{dF(E_i)} dF(E_j) \right)$$

On écrit $$\nabla_{dF(E_i)} dF(E_j) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}\, dF(E_k)$$

symbols de Christoffel

les symboles de Christoffel determinent la connexion.

si $V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, dF(E_i)$, $W = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\, dF(E_j)$,

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} dF(E_j) + \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}\, dF(E_k) \right)$$

<u>Proposition</u> (la connexion de Levi-Civita est unique)

Soient $S, \hat{S}$ deux hypersurfaces et $\varphi : S \to \hat{S}$ une isométrie.

Soit ∇ (resp. $\hat{\nabla}$) une connexion de Levi-Civita de S (resp. $\hat{S}$).

Alors $\forall V, W$ champs vecteurs sur S

$$\hat{\nabla}_{d\varphi(V)} d\varphi(W) = d\varphi(\nabla_V W).$$

Donc a posteriori, en appliquant la proposition à $id : S \to S$, <u>la</u> connexion de Levi-Civita est unique.

Preuve : Soit $F : \Omega \to V \subset S$ une carte locale.

On montrera que ∇ est uniquement déterminée par les coefficients de I^F.

On pose, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\nabla_{E_i} E_j := \nabla_{dF(E_i)} dF(E_j)$

Voyons nos hypothèses :

5) $\nabla_{E_i} E_j = \nabla_{E_j} E_i$ $\quad \left(\Rightarrow \forall i, j, k \quad \Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \right)$

6) $D_{E_k} I(E_i, E_j) = I(\nabla_{E_k} E_i, E_j) + I(E_i, \nabla_{E_k} E_j)$

But : déterminer $\nabla_{E_i} E_j$ en fonction de I

On calcule :

$$D_{E_i} I(E_j, E_k) + D_{E_j} I(E_i, E_k) - D_{E_k} I(E_i, E_j)$$

$$\overset{6)}{=} \left(I(\nabla_{E_i} E_j, E_k) + I(E_j, \cancel{\nabla_{E_i} E_k}) \right)$$
$$+ \left(I(\nabla_{E_j} E_i, E_k) + I(E_i, \cancel{\nabla_{E_j} E_k}) \right)$$
$$- \left(I(\cancel{\nabla_{E_k} E_i}, E_j) + I(E_i, \cancel{\nabla_{E_k} E_j}) \right)$$
$$\overset{5)}{=} 2 \cdot I(\nabla_{E_i} E_j, E_k)$$

Donc $\nabla_{E_i} E_j$ est déterminée uniquement par la condition

$$I(\nabla_{E_i} E_j, E_k) = \frac{1}{2} \left(D_{E_i} I(E_j, E_k) + D_{E_j} I(E_i, E_k) - D_{E_k} I(E_i, E_j) \right) \qquad \square$$

Def Soit $\gamma : I \to S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une courbe régulière dans S.

- la courbure géodésique de γ est $k^G_\gamma := \| \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \|$.
- γ est une géodésique si $\forall t \in I \quad \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0$.

Équivalement, la condition est

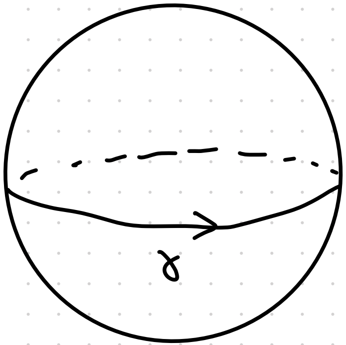
$$\gamma''(t) = D_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} S^{\perp}.$$

Rmq Cette condition implique que γ, si elle n'est pas constante, est paramétrée par un multiple de la longueur d'arc :

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = 0$$

donc $\|\gamma'(t)\|$ est constante.

Exemple La courbe $t \longmapsto (\cos t, \sin t, 0)$ est une géodésique de $\mathbb{S}^3$:



$$\gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) = -\gamma(t) = -\underset{\left(T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^3\right)^{\perp}}{\underset{\cap}{N(t)}}$$

La courbure normale vaut -1.

En appliquant des isométries, on voit que tout "grand cercle" (e.g. $C = \mathbb{S}^3 \cap P$, P plan linéaire) est une géodésique.