10. Géodésiques

Rappel : une courbe $\gamma : I \longrightarrow S$, $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hypersurface,

est une géodésique si $k^G_\gamma := \| \nabla_{\gamma'} \gamma' \| \equiv 0$.

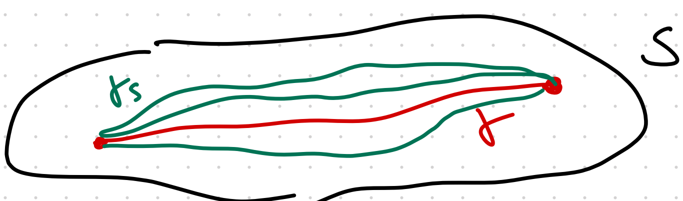
Cette condition est équivalente à ce que

$$\gamma''(t) \in T_{\gamma(t)} S^\perp \quad \forall t$$

<u>Théorème</u> Soit $\gamma : I = [0, t_0] \longrightarrow S$ une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc telle que $d(\gamma(0), \gamma(t_0)) = t_0$.
Alors γ est une géodésique. (e.g. γ minimise la distance)

<u>Preuve</u> : Soit $\Gamma : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ lisse telle que

- $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$
- $t \longmapsto \gamma_s(t) := \Gamma(t, s)$ est une courbe régulière
- $\Gamma(0, s) = \gamma(0)$ et $\Gamma(t_0, s) = \gamma(t_0) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$



Comme γ minimise la longueur,

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_0^{t_0} \sqrt{\langle \gamma_s'(t), \gamma_s'(t) \rangle}\, dt$$

$$= \int_0^{t_0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sqrt{\langle \gamma_s'(t), \gamma_s'(t)\rangle}\, dt = \int_0^{t_0} \frac{\langle \frac{d}{ds}\big|_{s=0} \frac{d}{dt}\Gamma(t,s), \gamma'(t)\rangle}{\underbrace{\sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}}_{\equiv 1}}\, dt$$

$$= \int_0^{t_0} \langle \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{d}{dt}\Gamma(t,s), \frac{d}{dt}\gamma(t)\rangle\, dt$$

$$= \int_0^{t_0} \langle \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Gamma(t,s), \frac{d}{dt}\gamma(t)\rangle\, dt$$

$= 0$ parce que

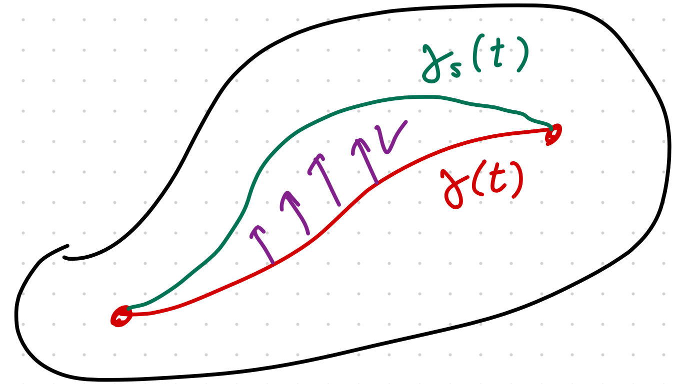
$\frac{d}{ds}\big|_{s=0} \Gamma(0,s) = 0$

$\frac{d}{ds}\big|_{s=0} \Gamma(t_0,s) = 0$

$$= \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \langle \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Gamma(t,s), \frac{d}{dt}\gamma(t)\rangle\, dt - \int_0^{t_0} \langle \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Gamma(t,s), \frac{d^2}{dt^2}\gamma(t)\rangle\, dt$$

$$= -\int_0^{t_0} \langle V(\gamma(t)), \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t)\rangle dt$$

où $V(\gamma(t)) := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Gamma(t,s)$



Maintenant, $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$ parce que sinon on aurait, pour

- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse avec $f(0) = f(t_0) = 0$, $f|_{(0,t_0)} > 0$,
- $\Gamma(t,s)$ lisse telle que

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Gamma(t,s) = V(\gamma(t)) = f(t)\, \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t),$$

$$\int_0^{t_0} \langle V(\gamma(t)), \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_0^{t_0} f(t) \| \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \|^2 dt > 0$$

et donc on obtiendrait une contradiction.

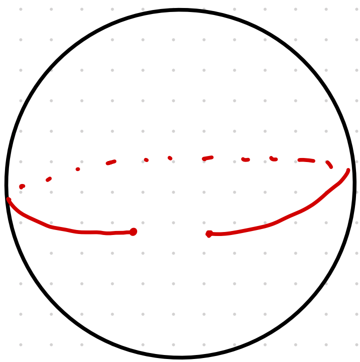
<u>Rmq</u> La preuve n'a pas vraiment utilisé que γ minimise la longueur, mais seulement que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{s=0} L(\gamma_s) = 0$$

pour toute variation $\gamma_s = \Gamma(\cdot, s)$.

Rmq : Les géodésiques en general ne minimisent pas les longueurs, mais elles les minimisent seulement localement.

Ex



Un grand cercle $\gamma : [a,b] \to \mathbb{S}^2$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

ne réalise pas la distance $d(\gamma(a), \gamma(b))$

si $b - a > \pi$.

Maintenant, si S est une <u>surface</u> $(n=2)$ orientée, on peut améliorer la définition de courbure géodésique

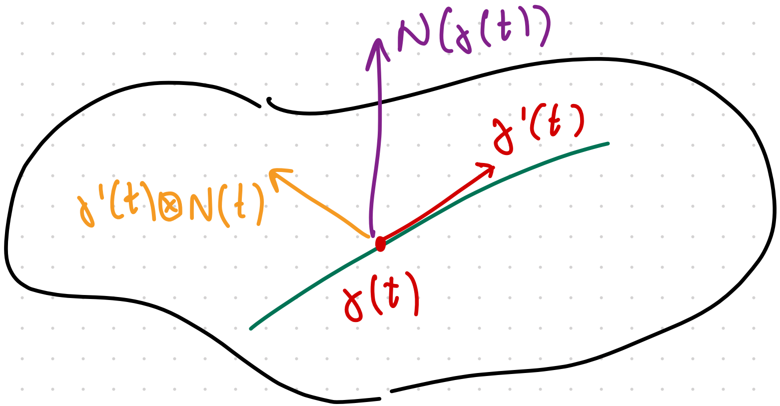
Soit N champ vecteur normal unitaire à S.

Soit $\gamma : I \longrightarrow S$ courbe regulière, paramétrée par longueur d'arc.

On définit la valeur algébrique de la courbure géodésique comme

$$K_\gamma(t) := \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), N(t) \boxtimes \gamma'(t) \rangle$$

Observons que $N(t) \boxtimes \gamma'(t)$ est un vecteur tangent à S (orthogonal à N), orthogonal à $\gamma'(t)$, unitaire.



Rmq Si γ ou S changent d'orientation, alors K_γ change de sign

Donc
$$K_\gamma(t) = \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), N(t) \boxtimes \gamma'(t) \rangle$$
$$= \langle \gamma''(t), N(t) \boxtimes \gamma'(t) \rangle$$

et
$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = K_\gamma(t) \left(N(t) \boxtimes \gamma'(t) \right)$$

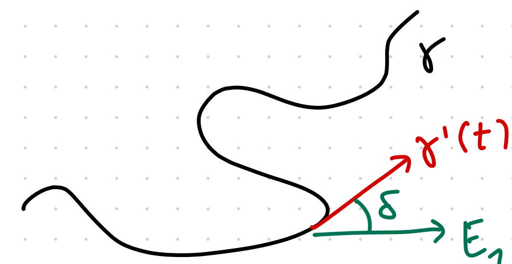
Cas particulier : $S = \mathbb{R}^2$

Considérons le cas $S = \{(x,y,0) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$ muni de l'orientation $N = (0,0,1)$.

Soit $\gamma : [0, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ courbe lisse, par longueur d'arc

soit $\delta : [0, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}$

une fonction "angle" continue



telle que

$$\gamma'(t) = (\cos \delta(t)) E_1 + (\sin \delta(t)) E_2$$

(δ est unique quitte à la remplacer par $\delta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$)

Alors on a

$$N \boxtimes \gamma'(t) = (-\cos\delta(t))E_1 + (\sin\delta(t))E_2$$

$$\gamma''(t) = -\cos\delta(t)\,\delta'(t)\,E_1 + \sin\delta(t)\,\delta'(t)\,E_2$$
$$= \delta'(t)\,(N \boxtimes \gamma'(t))$$

donc $K_\gamma(t) = \delta'(t)$

<u>Ex</u> Si $\gamma = (\cos t, \sin t, 0)$, $\operatorname{im}\gamma = \mathbb{S}^1$,

$$\gamma' = (-\sin t, \cos t, 0) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+t\right)E_1 + \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+t\right)E_2$$

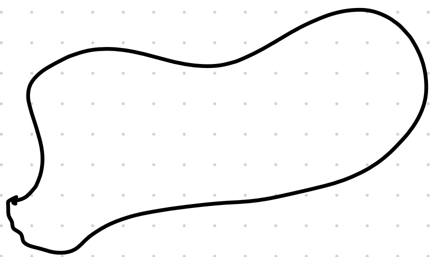
$$\Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} + t \quad (+\,2\pi k)$$

$$\Rightarrow K_\gamma \equiv 1 .$$

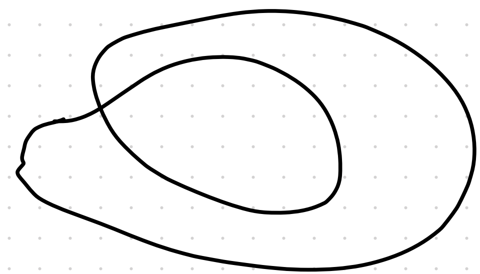
Soit maintenant $\gamma : [0, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ courbe fermée lisse

$$\gamma(0) = \gamma(t_0)$$

$$\text{et } \lim_{t \to 0^+} \gamma^{(n)}(t) = \lim_{t \to t_0^-} \gamma^{(n)}(t)$$



simple (γ injective)



non-simple

Dans ce cas, $\delta : [0,t_0] \to \mathbb{R}$ a la propriété que

$$\delta(t_0) - \delta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

On a donc

$$\int_0^{t_0} k_\gamma(t)\,dt = \int_0^{t_0} \delta'(t)\,dt = \delta(t_0) - \delta(0)$$

indice de γ

$\mathrm{ind}(\gamma)$

<u>Rmq</u> Si $\Gamma : [0,t_0] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ <u>lisse</u>,

$\gamma_s(t) := \Gamma(t,s)$ courbe fermée lisse $\forall s \in [0,1]$,

<u>isotopie lisse</u>

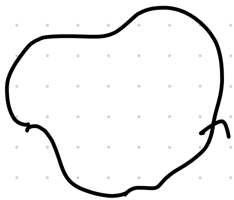
alors $\mathrm{ind}(\gamma_0) = \mathrm{ind}(\gamma_1)$

En fait, $\mathrm{ind}(\gamma_s)$ varie continûment par rapport à s

$\Longrightarrow$ localement constant $\Longrightarrow$ constant

Théorème Si γ est une courbe simple fermée dans $\mathbb{R}^2$ parcourue contre le sens de l'horloge,

alors $\qquad \operatorname{ind}(\gamma) = 2\pi.$

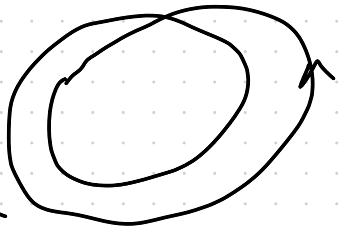


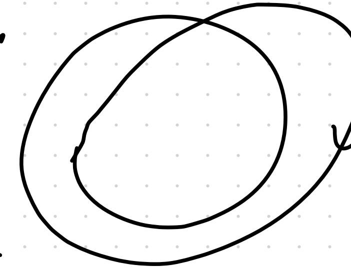
Preuve : Par le théorème de Jordan-Schonfliss, il existe une isotopie lisse entre γ et le cercle

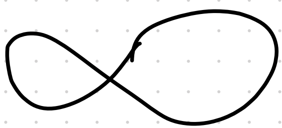
$$\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t).$$

Donc $\quad \operatorname{ind}(\gamma) = \operatorname{ind}(\gamma_0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

<u>Exemples</u>

ind () = 2

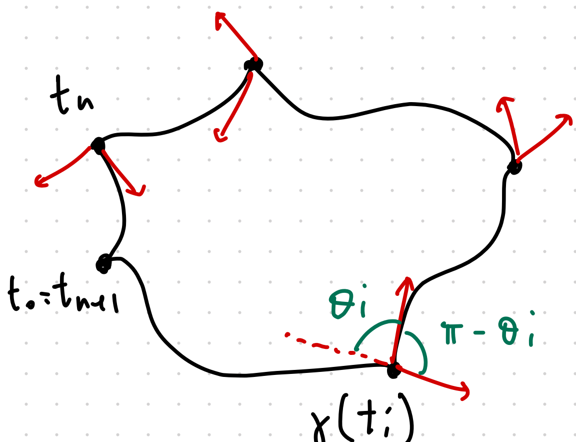
ind () = -2

ind () = 0

Si la courbe γ est simple et lisse par morceaux,

i.e. il existent $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \ell$ tels que

$\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} : [t_i,t_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est lisse, et $\lim\limits_{t\to t_i^\pm} \gamma'(t)$ existent,



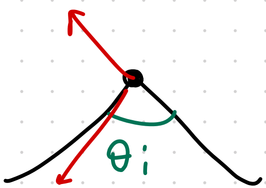
Alors on a la formule

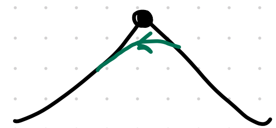
$$\int_0^\ell \kappa_\gamma(t) + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (\pi - \theta_i)}_{\text{angles extérieurs}} = 2\pi$$

En fait, sur chaque $[t_i, t_{i+1}]$ on peut prendre une fonction angle $\delta_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$, et

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} k_\gamma(t)\,dt = \delta(t_{i+1}) - \delta(t_i)$$

Sur les angles, on peut approximer γ par une courbe lisse $\hat{\gamma}$

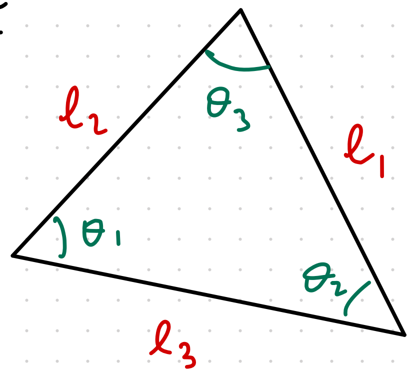




Donc $$2\pi = \mathrm{ind}(\hat{\gamma}) = \int_0^\ell k_{\hat{\gamma}} = \sum_{i=0}^n \left(\delta_i(t_{i+1}) - \delta_i(t_i) \right) + \sum_{i=0}^n (\pi - \theta_i)$$

$$= \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_i'(t)\,dt + \sum_{i=0}^n (\pi - \theta_i) = \int_0^\ell k_\gamma(t)\,dt + \sum_{i=0}^n (\pi - \theta_i)$$

Exemple



La formule nous donne ;

$$2\pi = \cancel{\int_{\ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3} K} + (\pi - \theta_1) + (\pi - \theta_2) + (\pi - \theta_3) = 3\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\Longrightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi .$$