# 11. Intégration et forme locale de Gauss-Bonnet

On montrera le théorème suivant :

**Théorème** (Gauss-Bonnet, forme locale)

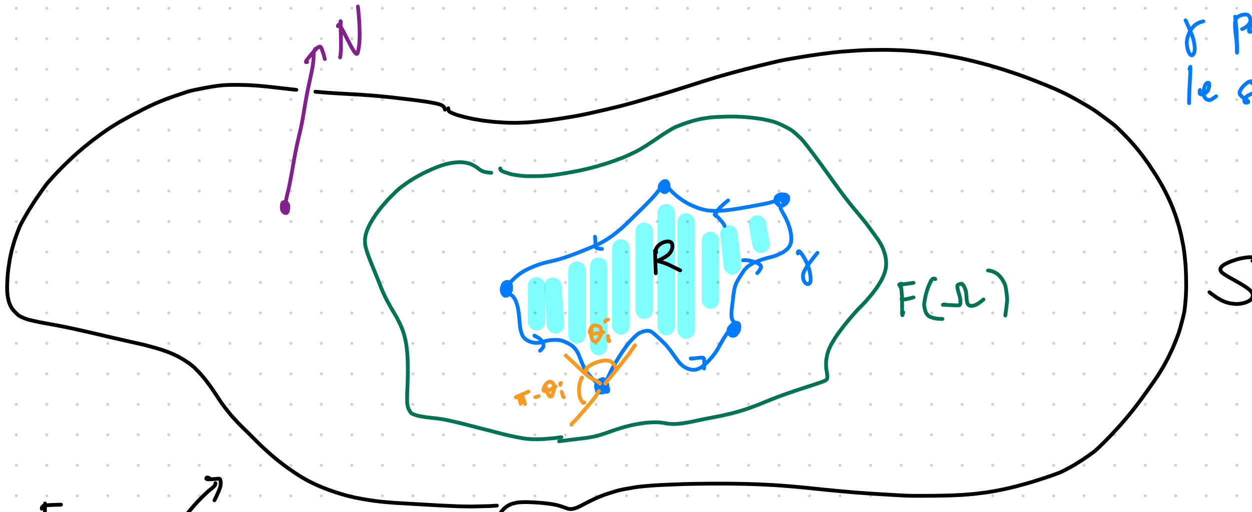
Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée, et soit $R \subset S$ ouvert contenu dans l'image d'une carte, tel que $\partial R = \gamma$ est une courbe simple fermée lisse par morceaux. Alors

$$\int_R K + \int_\gamma K_\gamma + \sum_{i=1}^n (\pi - \theta_i) = 2\pi$$

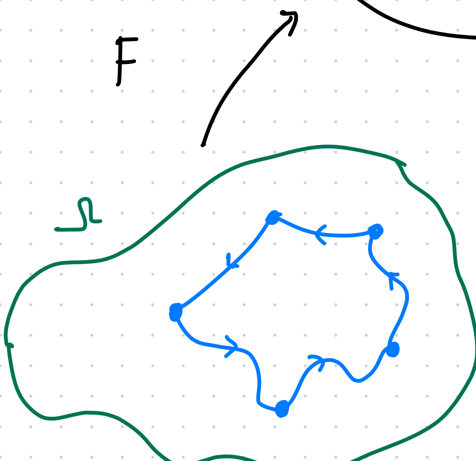
courbure gaussienne

valeur algébrique de la courbure géodésique

angles intérieurs




$\gamma$ parcourue contre le sens de l'horloge dans $\Omega$.

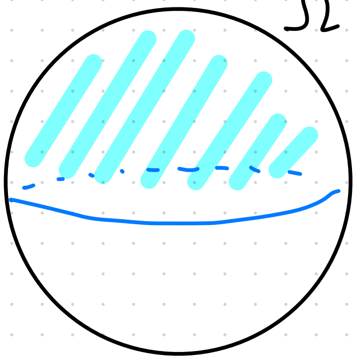



Il faudra définir $\int_U f$ pour $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction (continue)

Si $f \equiv 1$, $\int_U 1 =: \text{Aire}(U)$

Exemples pour $S = \mathbb{S}^2$ $(K \equiv 1)$

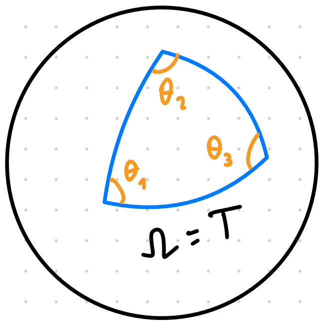
1) $\gamma$ = grand cercle, $\Omega$ = hémisphère



$$\text{Aire}(\Omega) + \cancel{\int_\gamma k_\gamma} + \cancel{\sum (\pi - \theta_i)} = 2\pi$$

$$\Longrightarrow \text{Aire}(\Omega) = 2\pi$$

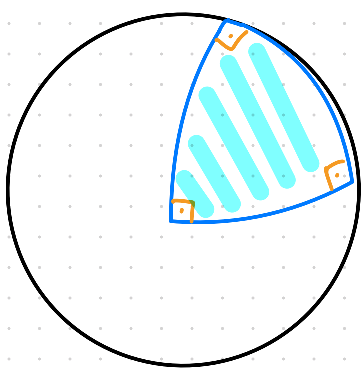
2) $\gamma$ = triangle avec angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$




Formule de la somme des angles :

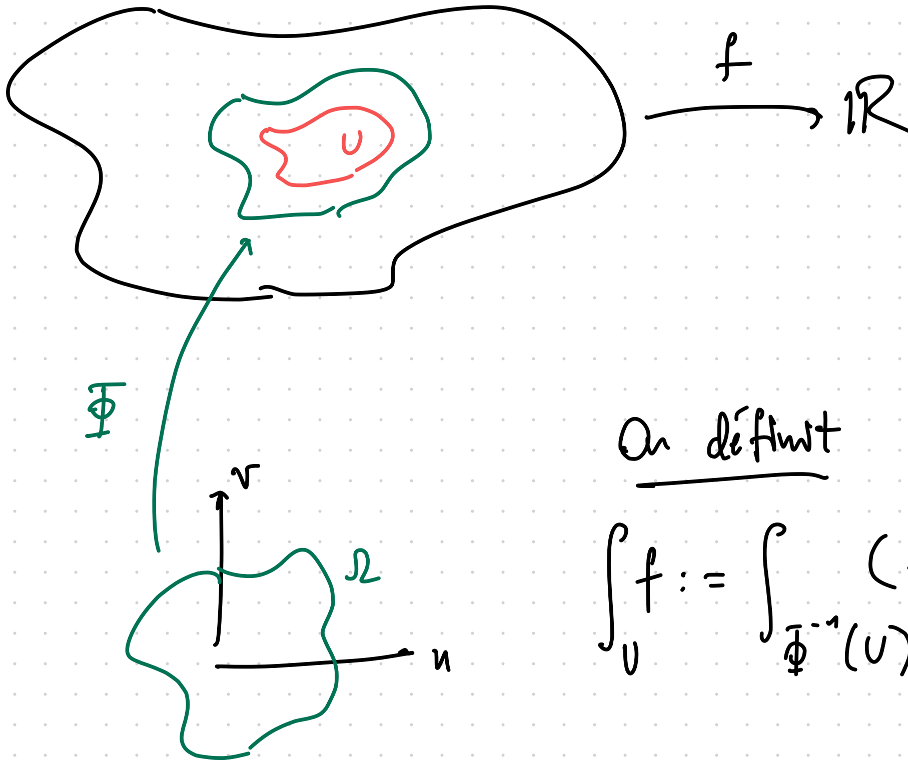
$$\mathrm{Aire}(T) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi$$

Par exemple, si $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{2}$,



$$\mathrm{Aire}(T) = \frac{\pi}{2} \quad \left(= \frac{1}{8}\,\mathrm{Aire}(\mathbb{S}^2)\right)$$

Soit $\Phi : \Omega^{\subset \mathbb{R}^2} \to S$ carte locale, et soit $f : S \to \mathbb{R}$ et $U \subset\subset \Phi(\Omega)$.




<u>On définit</u>

$$\int_U f := \int_{\Phi^{-1}(U)} (f \circ \Phi) \| \Phi_u \boxtimes \Phi_v \| \, du \, dv$$

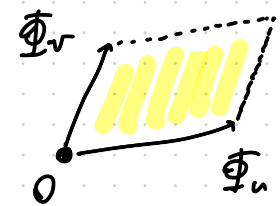
<u>Rmq</u> $\Phi_u \boxtimes \Phi_v$ est un vecteur proportionnel à $N$, et

$$\|\Phi_u \boxtimes \Phi_v\| = \|\Phi_u\| \, \|\Phi_v\| \sin\theta$$

angle entre $\Phi_u$ et $\Phi_v$

$\sin\theta > 0$

$$= \text{Aire}\Bigg($$




$$\Bigg)$$

$\subset T_{\Phi(u,v)} S$

$$\left( \begin{aligned} \|\Phi_u \boxtimes \Phi_v\|^2 &= \langle \Phi_u \boxtimes \Phi_v , \Phi_u \boxtimes \Phi_v \rangle \\ &= \det(\Phi_u, \Phi_v, \Phi_u \boxtimes \Phi_v) \end{aligned} \right)$$

On peut le récrire comme :

$$\|\Phi_u \otimes \Phi_v\| = \|\Phi_u\|\,\|\Phi_v\| \sin\theta$$

$$= \|\Phi_u\|\,\|\Phi_v\| \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \|\Phi_u\|\,\|\Phi_v\| \sqrt{1 - \frac{\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle^2}{\|\Phi_u\|^2 \|\Phi_v\|^2}}$$

$$= \|\Phi_u\|\,\|\Phi_v\| \sqrt{\frac{\|\Phi_u\|^2 \|\Phi_v\|^2 - \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle^2}{\|\Phi_u\|^2 \|\Phi_v\|^2}}$$

$$= \sqrt{\langle \Phi_u, \Phi_u \rangle \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle - \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle^2}$$

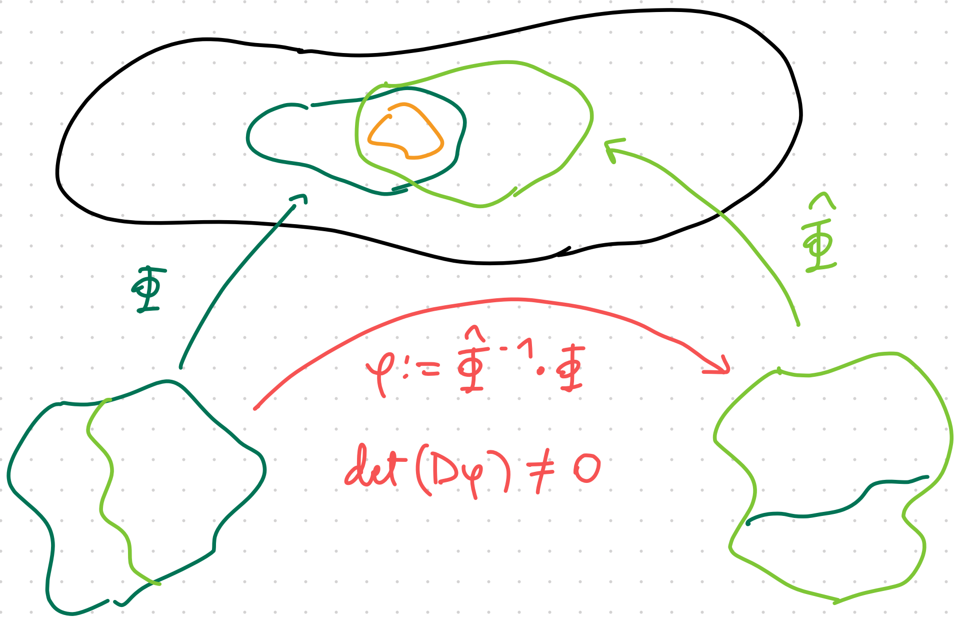
$$= \sqrt{\det I^{\Phi}}\,.$$

Rappel : $I^{\Phi} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

$\sqrt{\det I^{\Phi}} = \sqrt{EG - F^2}$

Donc $$\int_U f := \int_{\Phi^{-1}(U)} (f \cdot \Phi) \sqrt{\det I^{\Phi}}\, du\, dv$$

On vérifie que $\int f$ est bien défini : soit $\hat{\Phi}$ une autre carte locale.



$$\int_{\hat{\Phi}^{-1}(U)} (f\circ\hat{\Phi})\sqrt{\det I^{\hat{\Phi}}}\, d\hat{u}\, d\hat{v} = \int_{\varphi^{-1}(\hat{\Phi}^{-1}(U))} \left((f\circ\hat{\Phi})\circ\varphi\right)\left(\sqrt{\det I^{\hat{\Phi}}\circ\varphi}\right)|\det D\varphi|\, du\, dv$$

formule du changement de variables

$$= \int_{\Phi^{-1}(U)} (f\circ\Phi)\sqrt{\det D\varphi\cdot\det(I^{\hat{\Phi}}\circ\varphi)\cdot\det D\varphi}\, du\, dv$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(U)} (f\circ\Phi)\sqrt{\det\left(D\varphi^{T}\cdot(I^{\hat{\Phi}}\circ\varphi)\cdot D\varphi\right)}\, du\, dv$$

$\Phi = \hat{\Phi}\circ\varphi$

$$= \int_{\Phi^{-1}(U)} (f\circ\Phi)\sqrt{\det I^{\Phi}}\, du\, dv \; .$$

Donc $\int_U f$ est bien défini lorsque $U$ est contenu dans l'image d'une carte.

Sinon, on peut prendre $\Phi_i : \Omega_i \to S$, $i = 1, \dots, n$, telles que

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} \left( U \cap \Phi_i(\Omega_i) \right)$$

On pose alors

$$\int_U f := \sum_{i=1}^{n} \int_{U \cap \Phi_i(\Omega_i)} f$$

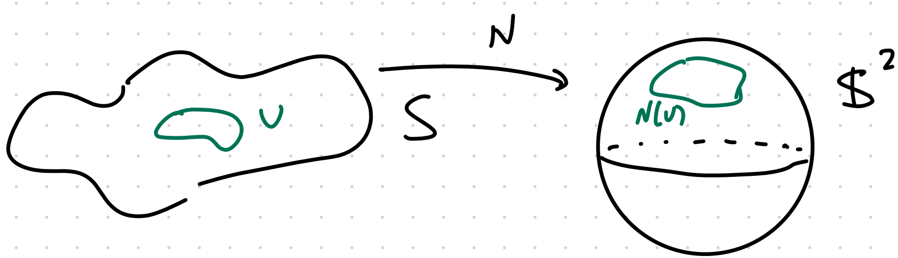
défini à travers la carte $\Phi_i$

Considérons maintenant la fonction $f = K$ (= courbure gaussienne)

Le terme $\int_U K$ intervient dans la formule de Gauss-Bonnet.

$$\int_U K = \int_{\Phi^{-1}(U)} (K \circ \Phi)\sqrt{EF - G^2}\, du\, dv$$

<u>Prop</u> Soit $U \subset S$ tel que l'application de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ est un difféo sur $U$. Alors $\int_U |K| = \text{Aire}(N(U))$.



La preuve découle de la formule $N_u \boxtimes N_v = K(\Phi_u \boxtimes \Phi_v)$ (*)

En fait, $$\int_U |K| = \int_{\Phi^{-1}(U)} |K| \, \|\Phi_u \boxtimes \Phi_v\| = \int_{\Phi^{-1}(U)} \|N_u \boxtimes N_v\| = \int_{N(U)} 1 = \text{Aire}(N(U))$$

Pour montrer (*), comme $N$ est orthogonal à $T_pS$ et à $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, $N_u \boxtimes N_v$ et $\Phi_u \boxtimes \Phi_v$ sont proportionnels à $N$.

Il reste donc à montrer :

$$\langle N_u \boxtimes N_v, N \rangle = K \langle \Phi_u \boxtimes \Phi_v, N \rangle$$

Pour cela,

$$B = -dN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$< N_u \boxtimes N_v , N > := \det ( N_u , N_v , N ) =$$

$$= \det ( a \Phi_u + b \Phi_v , c \Phi_u + d \Phi_v , N )$$

$$= ac \, \cancel{\det ( \Phi_u , \Phi_u , N )} + ad \det ( \Phi_u , \Phi_v , N )$$

$$+ bc \det ( \Phi_v , \Phi_u , N ) + bd \, \cancel{\det ( \Phi_v , \Phi_v , N )}$$

$$= ( ac - bd ) \det ( \Phi_u , \Phi_v , N )$$

$$= \det B < \Phi_u \boxtimes \Phi_v , N )$$

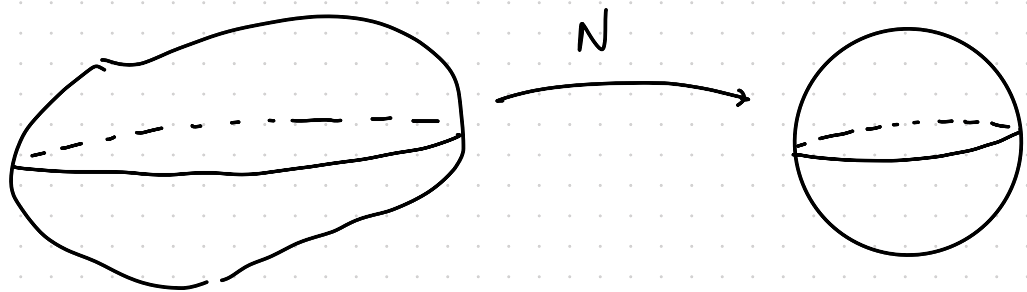
$$= K < \Phi_u \boxtimes \Phi_v , N > \qquad \square$$

**Corollaire** Soit $S$ une surface compacte avec $K > 0$

Alors $\int_S K = 4\pi$

Preuve: $N : S \to \mathbb{S}^2$ est un diffeo local $\Longrightarrow$ diffeo

codomain $= \mathbb{S}^2$



donc $\int_S K = \text{Aire}(\mathbb{S}^2) = 4\pi.$ $\square$

La formule de Gauss-Bonnet globale est un résultat beaucoup plus général.