12. Preuve de la forme locale de Gauss-Bonnet

But : montrer la forme locale de Gauss-Bonnet

<u>Théorème</u> (Gauss-Bonnet, forme locale)

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée, et soit $R \subset S$ ouvert contenu dans l'image d'une carte, tel que $\partial R = \gamma$ est une courbe simple fermée lisse par morceaux. Alors

$$\int_R K + \int_\gamma k_\gamma + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \theta_i) = 2\pi$$

γ contre le sens de l'horloge dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

N normal unitaire compatible

angles calculés par rapport à I

Tout d'abord, il faut construir, pour $p \in \Omega$, une base orthonormée qui dépend de manière lisse de p.

On applique Gram-Schmidt à $\{\Phi_u, \Phi_v\}$:

$$\varepsilon_1(\Phi(x)) := \frac{\Phi_u(x)}{\|\Phi_u(x)\|} = \frac{\Phi_u(x)}{\sqrt{E(x)}} \qquad I^{\Phi} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2(\Phi(x)) := \frac{\Phi_v(x) - \langle \Phi_v(x), \varepsilon_1(\Phi(x))\rangle \varepsilon_1(\Phi(x))}{\|\Phi_v(x) - \langle \Phi_v(x), \varepsilon_1(\Phi(x))\rangle \varepsilon_1(\Phi(x))\|}$$

Si Φ est une carte compatible avec l'orientation de S (i.e. $\{\Phi_u, \Phi_v, N\}$ est une base positive), alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, N\}$ est une base orthonormée positive.

Maintenant, soit $\gamma : [0, t_0] \to S$ paramétrisation par longueur d'arc, lisse par morceaux, $\gamma^{(n)}(0) = \gamma^{(n)}(t_0)$ $\forall n \geq 0$.

Soit $\delta : [0, t_0] \to \mathbb{R}$ "fonction angle" <u>continue</u> telle que $\gamma'(t) = \cos \delta(t)\, \varepsilon_1(\gamma(t)) + \sin \delta(t)\, \varepsilon_2(\gamma(t))$

Comme dans le cas de $\mathbb{R}^2$, δ est unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$ et, si γ est lisse,

$$\delta(t_0) - \delta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

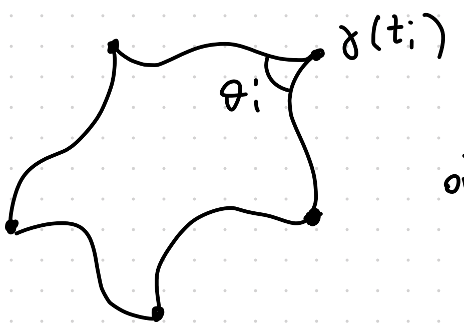
$$\text{"}\int_0^{t_0} \delta'(s)\,ds$$

Exactement comme pour $\mathbb{R}^2$,

- si γ courbe simple fermée lisse, $\delta(t_0) - \delta(0) = 2\pi$ (preuve : isotopie lisse entre γ et le cercle)

- si γ courbe simple fermée lisse par morceaux,

$$\delta(t_0) - \delta(0) + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \theta_i) = 2\pi$$



où θ_i = angle entre $\lim_{t \to t_i^-} \gamma'(t)$ et $\lim_{t \to t_i^+} \gamma'(t)$

Or, $\gamma'(t) = \cos\delta(t)\, \varepsilon_1(t) + \sin\delta(t)\, \varepsilon_2(t)$ $\leftarrow \varepsilon_1(t) = \varepsilon_1(\gamma(t))$

$$N_{\gamma(t)} \boxtimes \gamma'(t) = \cos\delta(t)\, N_{\gamma(t)} \boxtimes \varepsilon_1(t) + \sin\delta(t)\, N_{\gamma(t)} \boxtimes \varepsilon_2(t)$$

$$= \cos\delta(t)\, \varepsilon_2(t) - \sin\delta(t)\, \varepsilon_1(t)$$

$N \boxtimes \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

$N \boxtimes \varepsilon_2 = -\varepsilon_1$

$$\gamma''(t) = -(\sin\delta(t))\,\delta'(t)\, \varepsilon_1(t) + \cos\delta(t)\, \varepsilon_1'(t)$$
$$+ (\cos\delta(t))\,\delta'(t)\, \varepsilon_2(t) + \sin\delta(t)\, \varepsilon_2'(t)$$

$$= \delta'(t)\left(N_{\gamma(t)} \boxtimes \gamma'(t)\right) + \cos\delta(t)\, \varepsilon_1'(t) + \sin\delta(t)\, \varepsilon_2'(t)$$

Done

$$K_\gamma(t) = \langle \gamma''(t), N_{\gamma(t)} \boxtimes \gamma'(t) \rangle$$

$$= \delta'(t) + \langle \cos\delta(t)\,\varepsilon_2(t) - \sin\delta(t)\,\varepsilon_1(t), \cos\delta(t)\,\varepsilon_1'(t) + \sin\delta(t)\,\varepsilon_2'(t) \rangle$$

$$= \delta'(t) + \cos^2\delta(t) \langle \varepsilon_2(t), \varepsilon_1'(t) \rangle - \sin^2\delta(t) \langle \varepsilon_1(t), \varepsilon_2'(t) \rangle$$

$$- \sin\delta(t)\cos\delta(t) \langle \cancel{\varepsilon_1(t), \varepsilon_1'(t)} \rangle + \sin\delta(t)\cos\delta(t) \langle \cancel{\varepsilon_2(t), \varepsilon_2'(t)} \rangle$$

$$= \delta'(t) - \langle \varepsilon_1(t), \varepsilon_2'(t) \rangle$$

$$\langle \varepsilon_i(t), \varepsilon_i(t) \rangle = 1 \Rightarrow \langle \varepsilon_i(t), \varepsilon_i'(t) \rangle = 0$$

$$\langle \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \varepsilon_1(t), \varepsilon_2'(t) \rangle + \langle \varepsilon_1'(t), \varepsilon_2(t) \rangle = 0$$

On a alors

$$\int_0^{t_0} k_\gamma(s)\,ds = \int_0^{t_0} \delta'(s)\,ds - \int_0^{t_0} \langle \varepsilon_1(s), \varepsilon_2'(s)\rangle\,ds$$

$$= 2\pi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \theta_i) - \int_0^{t_0} \langle \varepsilon_1(s), \varepsilon_2'(s)\rangle\,ds$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_\gamma \langle \varepsilon_1(s), \varepsilon_2'(s)\rangle\,ds}_{} + \int_\gamma k_\gamma + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \theta_i) = 2\pi$$

il reste à montrer que ce terme est $= \int_R K$.

On va le réécrire de manière différente. Soit $\gamma(t) = (u(t), v(t))$

$$\int_0^{t_0} \langle \varepsilon_1(\gamma(s)), \varepsilon_2'(\gamma(s)) \rangle \, ds = \int_0^{t_0} \langle \varepsilon_1(\gamma(s)), \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial u}(\gamma(s)) u'(s) + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial v}(\gamma(s)) v'(s) \rangle ds$$

$$= \int_0^{t_0} \left\{ \begin{array}{l} [\langle \varepsilon_1(\gamma(s)), (\varepsilon_2)_u(\gamma(s)) \rangle] u'(s) \\ + [\langle \varepsilon_1(\gamma(s)), (\varepsilon_2)_v(\gamma(s)) \rangle] v'(s) \end{array} \right\} ds$$

$$= \int_\gamma (P u' + Q v') \, ds$$

$P := \langle \varepsilon_1(\gamma(s)), (\varepsilon_2)_u(\gamma(s)) \rangle$

$Q := \langle \varepsilon_1(\gamma(s)), (\varepsilon_2)_v(\gamma(s)) \rangle$

Théorème de Green

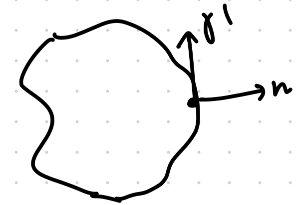
Si γ est une courbe simple fermée dans $\mathbb{R}^2$, parcourue contre le sens de l'horloge, U est la région bornée avec $\partial U = \gamma$, $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1 sur Ω, avec $\bar{U} \subset \Omega$,

$$\boxed{\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_U (Q_u - P_v)\,du\,dv}$$

$$= \int_0^{t_0} \Big[P\big(\underbrace{u(s), v(s)}_{\gamma(s) = (u(s), v(s))}\big)\, u'(s) + Q\big(u(s), v(s)\big)\, v'(s) \Big]\, ds$$

Rmq Le théorème de Green est équivalent au théorème de la divergence : si X est un champ vecteur sur U,

$$\int_U \operatorname{div} X = \int_\gamma \langle X, n \rangle$$



Pour $X = (L, M)$, $n(s) = (v'(s), -u'(s))$

$$\int_U (L_u + M_v)\, du\, dv = \int_\gamma L v' - M u'$$

Si l'on pose $X = (L, M) = (Q, -P)$, on obtient

$$\int_U (Q_u - P_v)\, du\, dv = \int_\gamma P u' + Q v'$$

Pour terminer la preuve de la forme locale de Gauss-Bonnet, il suffit alors de montrer que :

$$Q_u - P_v = K\sqrt{EG - F^2}$$

On aura donc $(U = \Phi^{-1}(R))$

$$\int_\gamma \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2' \rangle \, ds = \int_U (Q_u - P_v)\, du\, dv = \int_U K\sqrt{EF - G^2}\, du\, dv =: \int_R K$$

et donc

$$\int_R K + \int_\gamma k_\gamma + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \theta_i) = 2\pi .$$

Pour montrer $Q_u - P_v = K\sqrt{EG - F^2}$, on va considérer la quantité suivante : $\langle N_u \boxtimes N_v, N \rangle$

<u>Remarque</u>

déjà montré

$$\langle N_u \boxtimes N_v, N \rangle = K \langle \Phi_u \boxtimes \Phi_v, N \rangle$$
$$= K \langle \| \Phi_u \boxtimes \Phi_v \| N, N \rangle$$
$$= K \| \Phi_u \boxtimes \Phi_v \| \langle N, N \rangle$$
$$= K \| \Phi_u \boxtimes \Phi_v \| = K\sqrt{EG - F^2}$$

Φ carte compatible avec l'orientation i.e. $\{\Phi_u, \Phi_v, N\}$ est positive.

Il faut donc montrer que

$$\langle N_u \otimes N_v, N \rangle = Q_u - P_v$$

$$Q_u - P_v = \frac{\partial}{\partial u}\left(\langle \varepsilon_1, \frac{\partial}{\partial v} \varepsilon_2 \rangle \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\langle \varepsilon_1, \frac{\partial}{\partial u} \varepsilon_2 \rangle \right)$$

$$= \langle (\varepsilon_1)_u, (\varepsilon_2)_v \rangle + \cancel{\langle \varepsilon_1, (\varepsilon_2)_{uv} \rangle}$$

$$- \langle (\varepsilon_1)_v, (\varepsilon_2)_u \rangle - \cancel{\langle \varepsilon_1, (\varepsilon_2)_{uv} \rangle}$$

$$= \langle (\varepsilon_1)_u, (\varepsilon_2)_v \rangle - \langle (\varepsilon_1)_v, (\varepsilon_2)_u \rangle$$

Maintenant,

$$(\varepsilon_1)_u = (\; - \; - \;) \, \varepsilon_2 + \langle (\varepsilon_1)_u, N \rangle N$$
$$(\varepsilon_1)_v = (\; - \; - \; - \;) \, \varepsilon_2 + \langle (\varepsilon_1)_v, N \rangle N$$
$$(\varepsilon_2)_u = (\; - \; - \;) \, \varepsilon_1 + \langle (\varepsilon_2)_u, N \rangle N$$
$$(\varepsilon_2)_v = (\; - \; - \; - \;) \, \varepsilon_1 + \langle (\varepsilon_2)_v, N \rangle N$$

$$\begin{aligned}
\langle N_u \boxtimes N_v, N \rangle &= \langle N_u \boxtimes N_v, \varepsilon_1 \boxtimes \varepsilon_2 \rangle \\
&= \det (N_u, N_v, \varepsilon_1 \boxtimes \varepsilon_2) \\
&= \langle N_u, \varepsilon_1 \rangle \langle N_v, \varepsilon_2 \rangle - \langle N_u, \varepsilon_2 \rangle \langle N_v, \varepsilon_1 \rangle \\
&= \langle N, (\varepsilon_1)_u \rangle \langle N, (\varepsilon_2)_v \rangle - \langle N, (\varepsilon_1)_v \rangle \langle N, (\varepsilon_2)_u \rangle \\
&= \langle (\varepsilon_1)_u, (\varepsilon_2)_v \rangle - \langle (\varepsilon_1)_v, (\varepsilon_2)_u \rangle \\
&= Q_u - P_v \qquad \square
\end{aligned}$$

dans la base $\{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 \boxtimes \varepsilon_2 \}$,

$$\det \left(N_u, N_v, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\langle \varepsilon_i, N \rangle = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \langle (\varepsilon_i)_u, N \rangle = - \langle \varepsilon_i, N_u \rangle \\ \langle (\varepsilon_i)_v, N \rangle = - \langle \varepsilon_i, N_v \rangle \end{cases}$$