13. Forme globale de Gauss-Bonnet

<u>Théorème</u> (Gauss-Bonnet, forme globale pour surfaces fermées)

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface fermée orientable. Alors

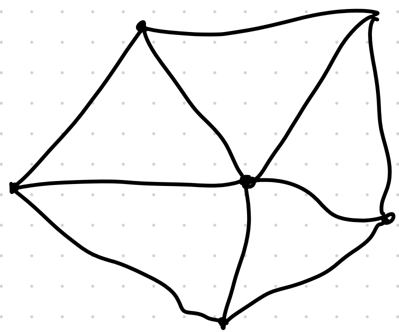
$$\int_S K = 2\pi \chi(S)$$

caractéristique d'Euler

<u>invariant topologique</u> : si S est homéomorphe à S', alors $\chi(S) = \chi(S')$.

Caractéristique d'Euler

Fait : toute surface S admet une triangulation



Un sous-ensemble $T \subset S$ est un triangle s'il existe un homéomorphisme entre T et un triangle fermée dans $\mathbb{R}^3$.

Une triangulation de S est une collection de triangles $\{T_i\}_{i\in I}$ tels que :

- $S = \bigcup_{i\in I} T_i$
- $\forall i\neq j$, $T_i \cap T_j$ est la réunion (possiblement vide) de sommets et arrêts de T_i et T_j
- $\forall K \subset S$ borné, $\{i\in I \mid K\cap T_i \neq \emptyset\}$ est fini.

Donc si S est fermée, alors I est un ensemble fini.

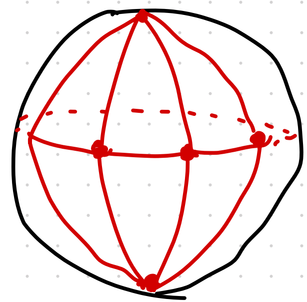
On définit alors, pour une triangulation $\{T_i\}$ de S,

$$\chi(S) := \#\text{faces} - \#\text{arrêts} + \#\text{sommets}.$$

<u>Exemple</u> : $\chi(\text{triangle}) = 1$

$\chi(\text{polygon}) = 1$

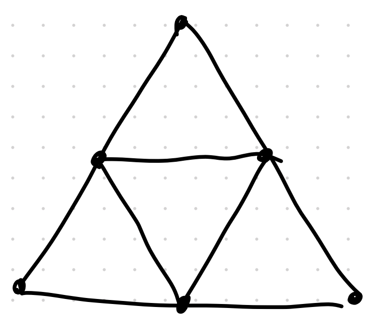
$\chi(S^2) = 2$



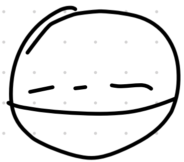
$(n+2) - 3n + 2n = 2$

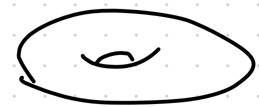
Prop La caractéristique d'Euler ne dépend pas de la triangulation.

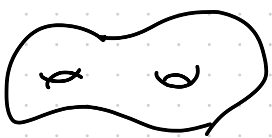
Idée : étant données 2 triangulation différentes, on peut trouver une triangulation qui est une subdivision commune des deux.

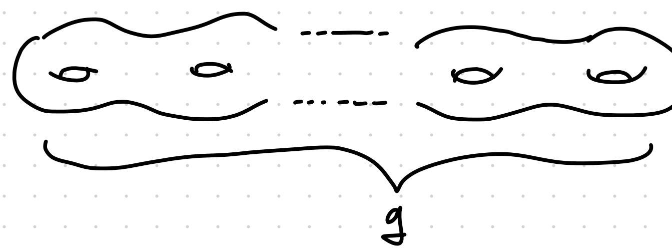


<u>Théorème</u> Toute surface fermée orientable est homéomorphe à la surface S_g de genre g, pour quelque $g \geq 0$.

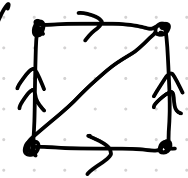
$S_0 = S^2 =$ 

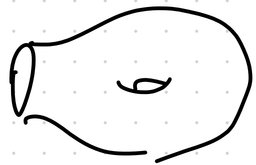
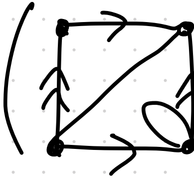
$S_1 = T^2 =$ 

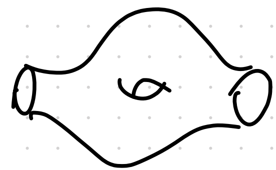
$S_2 =$ 

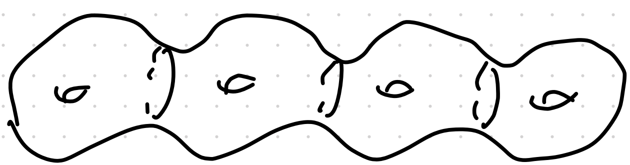
$S_g =$ 

On a $\chi(S_g) = 2 - 2g$.

En fait, $\chi(T^2) = \chi\Bigg($  $\Bigg) = 2 - 3 + 1 = 0$

$\chi(T^2 \setminus \text{disque}) = \chi\Bigg($  $\Bigg) = \chi\Bigg($  $\Bigg) = -1$

$\chi(T^2 \setminus \text{deux disques}) = \chi\Bigg($  $\Bigg) = -2$

$\chi(S_g) = \chi\Bigg($  $\Bigg) = -1 - 1 - 2(g-2)$

$= 2 - 2g$.

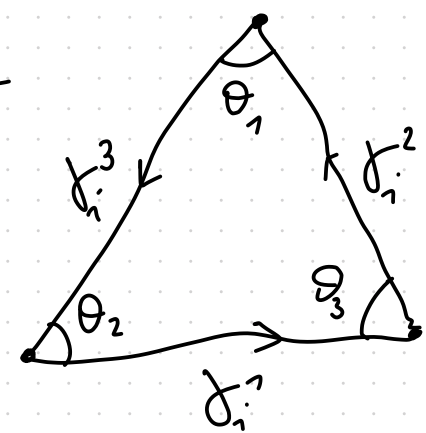
Preuve de la forme globale de Gauss-Bonnet.

Soit $\{T_i\}_{i\in I}$ une triangulation de S.

Quitte à prendre des subdivisions, on peut supposer que chaque T_i est contenu dans l'image d'une carte.

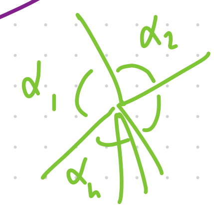
On a donc :

$$\int_{T_i} K + \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_i^j} k_{\gamma_i^j} + \sum_{j=1}^{3} (\pi - \theta_i) = 2\pi$$

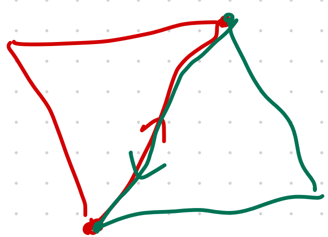


On prend donc la somme sur tous les triangles de la triangulation :

$$\int_S K + \underbrace{\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{3}\int_{\gamma_i^j} k_{\gamma_i^j}}_{=0} + \underbrace{\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{3}(\pi-\theta_i^j)} = 2\pi \,\#\text{faces}$$



$$\sum_{l=1}^{n} \alpha_l = 2\pi$$



Donc $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{3}(\pi-\theta_i^j)$

$= 2\pi \,\#\text{arrêts} - 2\pi\,\#\text{sommets}$

k_γ change de signe si γ change d'orientation.

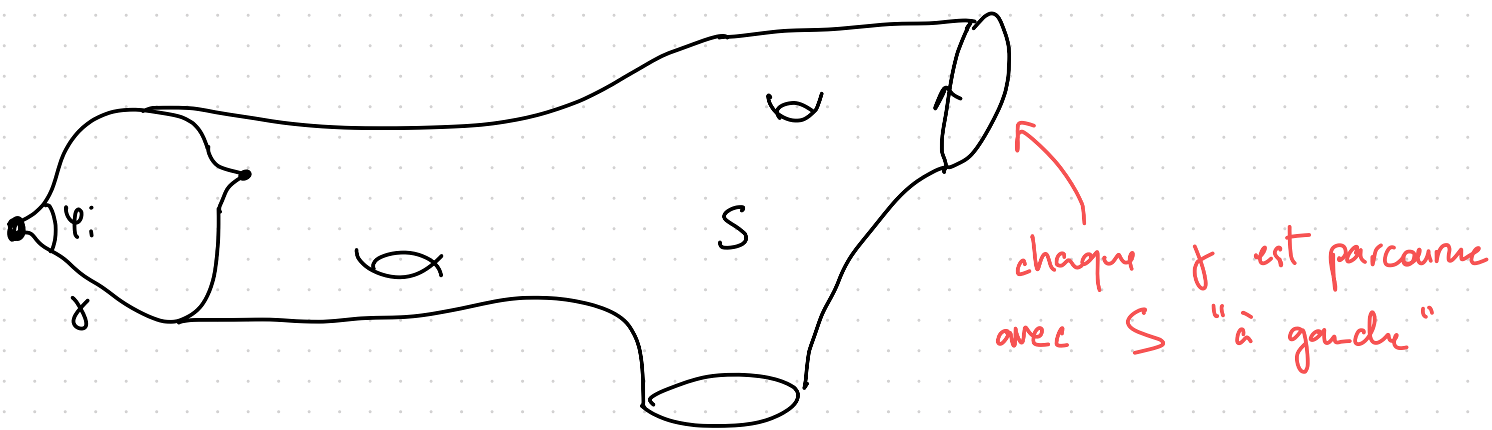
$$\Longrightarrow \int_S K = 2\pi\left(\#\text{faces} - \#\text{arrêts} + \#\text{sommets}\right)$$

Théorème (Gauss-Bonnet, version globale avec bord)

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte orientable avec bord et coins.

Alors

$$\int_S K + \sum_{\gamma \subset \partial S} \int_\gamma k_\gamma + \sum_i (\pi - \varphi_i) = 2\pi \chi(S)$$



Preuve : Soit $\{T_i\}$ une triangulation qui induit toutes les composantes de bord et les coins de ∂S.

$$\int_{T_i} K + \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_i^j} k_{\gamma_i^j} + \sum_{j=1}^{3} (\pi - \theta_i) = 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_S K + \underbrace{\sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_i^j} k_{\gamma_i^j}}_{\sum_{\gamma \subset \partial S} \int_\gamma k_\gamma} + \underbrace{\sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{3} (\pi - \theta_i^j)}_{\sum_{\text{angles au bord}} (\pi - \varphi_i) + \sum_{\text{angles intérieurs}} (\pi - \theta_i^j)} = 2\pi \,\#\text{faces}$$

$$\underbrace{\sum_{\text{angles intérieurs}} (\pi - \theta_i^j)}_{= 2\pi \,\#\text{arrêts} - 2\pi \,\#\text{sommets}}$$