FEUILLE D'EXERCICE 3

Exercice 1. Montrer que, si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ sont des constantes, la solution $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

avec condition initiale

$$u(0, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$$

est donnée par :

$$u(t, x_1, \dots, x_n) = g(x_1 - v_1 t, \dots, x_n - v_n t) \ .$$

Exercice 2. Considérons l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

pour une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

— Montrer que les courbes caractéristiques sont toutes les courbes

$$\gamma_c(t) = (t, \tan(t + c)) \ .$$

— Vérifier que tout point $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ est sur la courbe γ_c pour $c = \arctan(x) - t$.

— Déduire que, si $u(0, x) = g(x)$ pour une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors

$$u(t, x) = g\left(\frac{x - \tan t}{1 + x \tan t}\right) \ .$$

Exercice 3. Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \\ u(\cos\theta, \sin\theta) = g(\theta) \end{cases}$$

pour une fonction donnée $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$.

— Montrer que les courbes caractéristiques sont toutes les demi-droites avec origine en $(0, 0)$.

— Montrer que tout point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est sur la même courbe caractéristique du point

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \ .$$

— Conclure que la solution du problème est :

$$u(x_1, x_2) = g\left(\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right) \ .$$