

FEUILLE D'EXERCICE 6

Exercice 1. Soient $f_i : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3 \sin(4x) \quad f_2(x) = \cos(\pi/2 - x) \quad f_3(x) = \sin(3x) + 7 \sin(5x) \quad f_4(x) = 4 \sin(x) \cos(x) .$$

Considérer l'équation d'onde sur l'intervalle $[0, \pi]$, avec extrémités fixées :

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = f_i(x) \\ u_t(x, 0) = f_j(x) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 . \end{cases}$$

Pour tout choix $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ (ça fait 16 choix possibles) :

- (1) Vérifier que les conditions initiales $u(x, 0) = f_i(x)$, $u_t(x, 0) = f_j(x)$ sont compatibles avec les contraintes $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.
- (2) Trouver la solution de l'équation (1).