Analyse 4b - Introduction aux équations différentielles

Qu'est-ce que c'est une équation différentielle ?

- ordinaire (EDO) :

  c'est une équation de la forme

  $$F(x, u, u', \dots, u^{(k)}) = 0$$

  où $F : I \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k} \to \mathbb{R}$ est une fonction (continue).

  Une solution est une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que

  $$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(k)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

  e.g. $u'(t) = k\, u(t)$ (de ordre $k=1$)

  t = temps

  u = population

  Solutions: $$\frac{u'(t)}{u(t)} = k$$

  $$\int \frac{u'(t)}{u(t)}\, dt = \int k\, dt + c$$

  $$\log u(t) = kt + c$$

  $$u(t) = e^{c+kt} = \hat{c}\, e^{kt}$$

  où $\hat{c} = e^c = u(0)$.

- aux dérivées partielles (EDP)

c'est une équation de la forme

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) = 0$$

où $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert

est une fonction continue

Une solution est une fonction $u : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\Omega}} \to \mathbb{R}$

différentiable jusqu'au ordre suffisant, telle que

$$F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x), \dots\right) = 0$$

$$\forall x \in \Omega \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

e.g. • équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$u = u(x,t)$ = quantité à transporter

t = temps

- équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \Delta u \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Laplacien de u

$u = u(x_1, \dots, x_n, t)$ = température

- équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \Delta u$$

u = fonction d'onde

Rappel de calcul différentielle

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, et soit $v \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$.

La dérivée de f dans le point x_0 suivant le vecteur v est la limite (si existe):

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \partial_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} .$$

Si $\|v\| = 1$, on parle de dérivée directionnelle dans la direction de v.

Si $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, on parle de dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \partial_i f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{t}$$

où $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Déf: Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est Gâteaux-différentiable dans $x_0 \in \Omega$ si $\partial_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ existe pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

Rmq: Si f est Gâteaux-différentiable,

$$\frac{\partial f}{\partial (\lambda v)}(x_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \qquad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}$$

En fait,
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda v) - f(x_0)}{t} \underset{s = t\lambda}{=} \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s/\lambda}$$

$$= \lambda \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s} .$$

La notion de Gâteaux-différentiable n'est pas assez satisfaisant : il y a des fonctions Gâteaux-différentiables dans x_0, qui ne sont pas continues !

e.g. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $(x_0,y_0)=(0,0)$, $v=(u,w)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

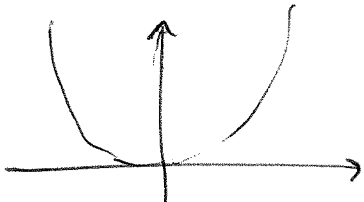
$$\frac{f(tu,tw)}{t} = \frac{t^6u^4w^2}{t(t^4u^4+t^2w^2)^2} = \frac{t^6u^4w^2}{t^5(t^2u^4+w^2)}$$

si $w=0$, $f(tu,tw)=0$ et donc $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(tu,0)}{t}=0$

si $w\neq0$, $\dfrac{u^4w^2}{t^2u^4+w^2}\to u^4$ et donc $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(tu,tw)}{t}=0$

donc $\partial_v f=0$ $\forall w\in\mathbb{R}^2$

<u>Mais</u> si $\gamma(t)=(t,t^2)$



$$\lim_{t\to0} f(\gamma(t)) = \frac{t^8}{(2t^4)^2} = \frac{t^8}{2^4t^{16}} = \frac{1}{2^4t^8} \xrightarrow[t\to0]{} +\infty$$

f n'est pas continue dans $(x_0,y_0)=(0,0)$!

Il y a une notion plus forte de différentiabilité.

Si f est Gâteaux-différentiable, l'application $v\longmapsto\partial_v f$ est homogène ($\partial_{\lambda v}f=\lambda\partial_v f$) mais en général pas linéaire.

Déf Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est Fréchet-différentiable dans $x_0 \in \Omega$ s'il existe $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + r(x)$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r(x)}{\|x - x_0\|} = 0$

Alors ℓ est la différentielle de f, $df(x_0) = \ell$.

Rmq Si f est Fréchet-différentiable, alors f est continue dans $x_0 \in \Omega$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Rmq Si f est Fréchet-différentiable,

$$\partial_v f(x_0) = df(x_0)(v)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\ell(tv)}{t} + \frac{r(x_0 + tv)}{t} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{t\ell(v)}{t} + \underbrace{\frac{r(x_0 + tv)}{\|tv\|}}_{\to 0} \cdot \|v\| \right) = \ell(v).$$

Dans ce cas, l'application $v \longrightarrow \partial_v f$ est linéaire ! (c'est la différentielle).

Donc on a la formule :

si $v = (v_1, \ldots, v_n)$

$$df(v) = df(v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n) =$$
$$= v_1\, df(e_1) + \ldots + v_n\, df(e_n)$$
$$= v_1\, \partial_{x_1} f + \ldots + v_n\, \partial_{x_n} f$$

On appelle gradient de f :

$$\nabla f = (\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f)$$

Alors $\underline{df_{x_0}(v) = \nabla f(x_0) v}$

<u>Autre exemple</u> :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$v = (u,w) \neq (0,0) \quad \partial_v f(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tu, tw)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 u^3}{t(t^2u^2 + t^2w^2)}$$
$$= \frac{u^3}{u^2+w^2}$$

si $v = (0,0)$, $\partial_v f(x_0) = 0$

f n'est pas Fréchet différentiable car l'application

$v \longmapsto \partial_v f$ n'est pas linéaire.

Mais f est continue dans $(0,0)$:

$$|f(x,y)| = \frac{|x|^3}{(x^2+y^2)} \leq \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leq |x| < \varepsilon \qquad \text{si } d((x,y),(0,0)) < \delta$$
$$\delta = \varepsilon.$$