EDPs du premier ordre - méthode des caractéristiques

Une équation aux dérivées partielles du premier ordre est une équation de la forme

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

où $F : \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert.

- EDPs du premier ordre linéaires

On commence par étudier le cas linéaire, c'est-à-dire, équations de la forme

$$f_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \qquad (*)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Rmq L'équation $(*)$ est appellé linéaire parce que la fonction

$F(x, u, v_1, \dots, v_n) = f_1(x) v_1 + \dots + f_n(x) v_n$

dépend linéairement de $v_1, \dots, v_n$.

Du coup, l'ensemble des solutions

$\left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; f_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \right\}$

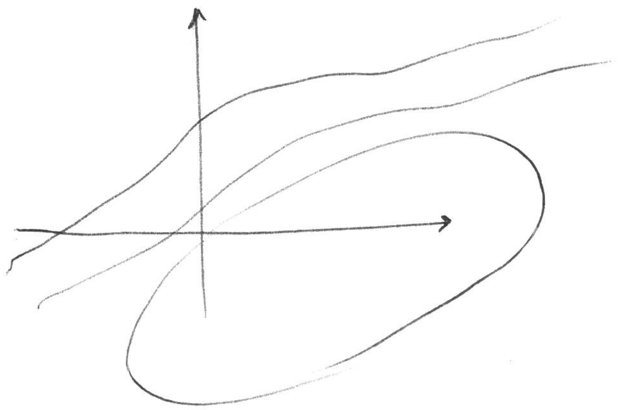
est un espace vectoriel :

si $u_1, u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ sont solutions de $(*)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

alors $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ est solution de $(*)$.

Idée de la méthode des caractéristiques:

On cherche des courbes dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sur lesquelles la solution u est constante



Pour connaître u, il suffit de connaître u sur un point sur chaque courbe "caractéristique".

Soit $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

Pour la règle de la chaîne, $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xrightarrow{u} \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\gamma(t_0)), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(\gamma(t_0)) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{pmatrix}$$

$$= x_1'(t_0) \frac{\partial u}{\partial x_1}(\gamma(t_0)) + \dots + x_n'(t_0) \frac{\partial u}{\partial x_n}(\gamma(t_0)).$$

Si γ satisfait,

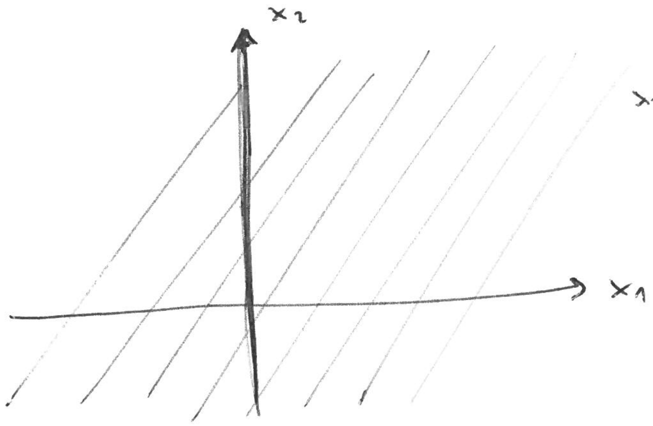
$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(\gamma(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(\gamma(t)) \end{cases}$$

Alors la fonction u est constante le long de la courbe γ.

Exemple 1 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad a \in \mathbb{R}$

On cherche $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ telle que

$$\begin{cases} x_1'(t) = 1 \\ x_2'(t) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = t + c_1 \\ x_2(t) = at + c_2 \end{cases}$$



$x_2 = a x_1 + c \, , \quad c = c_2 - a c_1$

Rmq: On peut supposer $c_1 = 0$, du coup $x_1(t) = t$

Parfois on écrit $\dfrac{\partial u}{\partial t} + a \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\quad x_1 \leftrightarrow t$, $x_2 \leftrightarrow x$

Si on connaît u sur la droite $t = 0$, on peut connaître u partout.

Soit $p = (t_0, x_0)$. Le point p est sur la même courbe caractéristique $\gamma_c(t) = (t, at + c)$ du point $\gamma_c(0) = (0, c)$ pour $c = x_0 - at_0$.

Donc on a $u(t_0, x_0) = u(0, x_0 - at_0)$.

En conclusion, la solution du problème

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0 \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

est la fonction $u(t, x) = g(x - at)$.

Exemple 2 $\quad u_t + x u_x = 0$

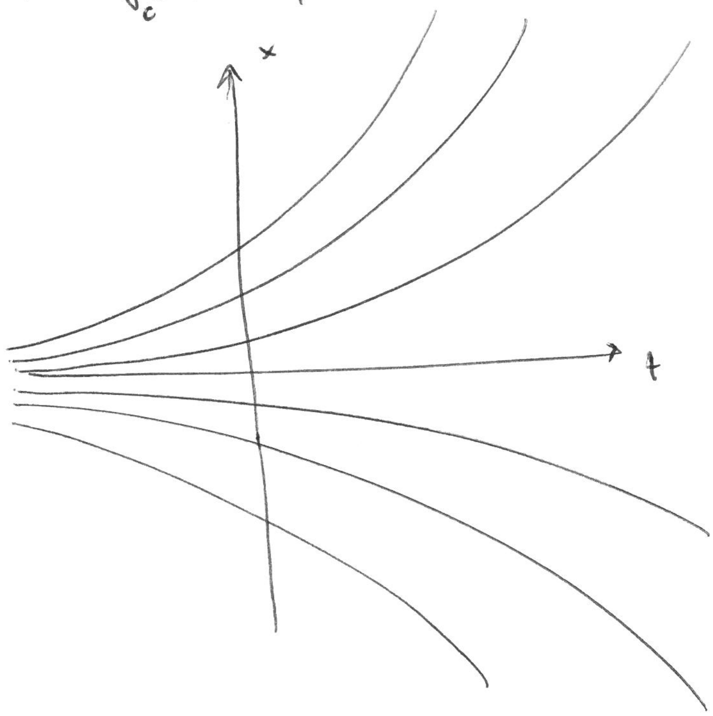
On cherche $\gamma(s) = (t(s), x(s))$ telle que

$$(u\circ\gamma)'(s) = u_t(\gamma(s))\cdot t'(s) + u_x(\gamma(s))\cdot x'(s) = 0$$

Du coup on impose $\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = x(s) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t \equiv s \\ \dfrac{x'(t)}{x(t)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \equiv s \\ x(t) = Ce^t \end{cases}$$

Alors $\gamma_c(t) = (t, Ce^t)$



Si $p_0 = (t_0, x_0)$, $\quad p_0 = \gamma_c(t_0) = (t_0, Ce^{t_0})$

pour $x_0 = Ce^{t_0} \Rightarrow C = \dfrac{x_0}{e^{t_0}}$

Donc $u(t_0, x_0) = u(\gamma_c(0)) = u\left(0, \dfrac{x_0}{e^{t_0}}\right)$, car u est constante le long des courbes γ_c.

Ça montre que, si on impose la condition initiale $u(0,x) = g(x)$, la solution du problème est

$$u(t,x) = u(0, xe^{-t}) = g(xe^{-t}).$$