- EDPs du premier ordre linéaires non-homogènes

Ces sont des équations de la forme

$$f_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x), \qquad (**)$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Rmq La fonction $u \equiv 0$ n'est pas une solution si $f(x) \neq 0$.

L'ensemble des solutions

$$\left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; f_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x) \right\}$$

est un <u>espace affine</u> : toute solution u est de la forme

$u = u_0 + v$ où : • u_0 est une solution de $(**)$

• v est une solution de l'équation homogène associée

$$f_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \qquad (*)$$

$$\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid (**) \} = u_0 + \{ v : \Omega \to \mathbb{R} \mid (*) \}.$$

<u>Exemple 1</u> : $u_t + a u_x = f$, $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Si $\gamma(t) = (t, at + c)$ comme avant,

$(u \circ \gamma)'(t) = u_t + a u_x = f(\gamma(t))$

Du coup, la variation de la fonction u est donnée par la fonction f.

Si $p_0 = (t_0, x_0)$, p_0 est sur la courbe

$\gamma(t) = (t, at + c)$ où $c = x_0 - at_0$

Alors
$$u(t_0, x_0) = u(0, x_0 - at_0) + \int_0^{t_0} (u \circ \gamma)'(s)\, ds$$
$$= u(0, x_0 - at_0) + \int_0^{t_0} f(\gamma(s))\, ds$$
$$= u(0, x_0 - at_0) + \int_0^{t_0} f(s, as + c)\, ds$$
$$= g(x_0 - at_0) + \int_0^{t_0} f(s, as + x_0 - at_0)\, ds$$

où $u(0, x) = g(x)$.

e.g. si $g(x) = 2x + 1$
$f(t, x) = e^t$

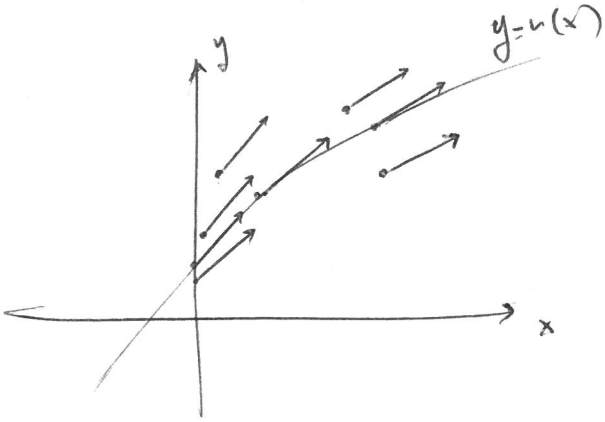
la solution du problème $\begin{cases} u_t + a u_x = f \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}$ est

$$u(t, x) = 2(x - at) + 1 + \int_0^t e^s\, ds$$
$$= 2x - 2at + 1 + (e^t - 1) = 2x - 2at + e^t.$$

Interprétation géométrique

- EDO du premier ordre :

$$u'(x) = f(x, u(x))$$



Dans tout point (x, y), un vecteur

$$v_{(x,y)} = (1, f(x,y))$$

est donné.

Trouver une solution $\leftrightarrow$ Trouver une courbe telle que le vecteur tangent dans tout point (x, y) est le vecteur $v_{(x,y)}$.

- EDP du premier ordre (quasi-) linéaires :

$$f_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x, u)$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

Idée : Chercher $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ telle que

$$x_1'(t) = f_1(x(t), u(x(t)))$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f_n(x(t), u(x(t)))$$

et en plus la fonction $u(x(t))$ telle que

$$(u \circ x)'(t) = f_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x(t), u(x(t)))$$

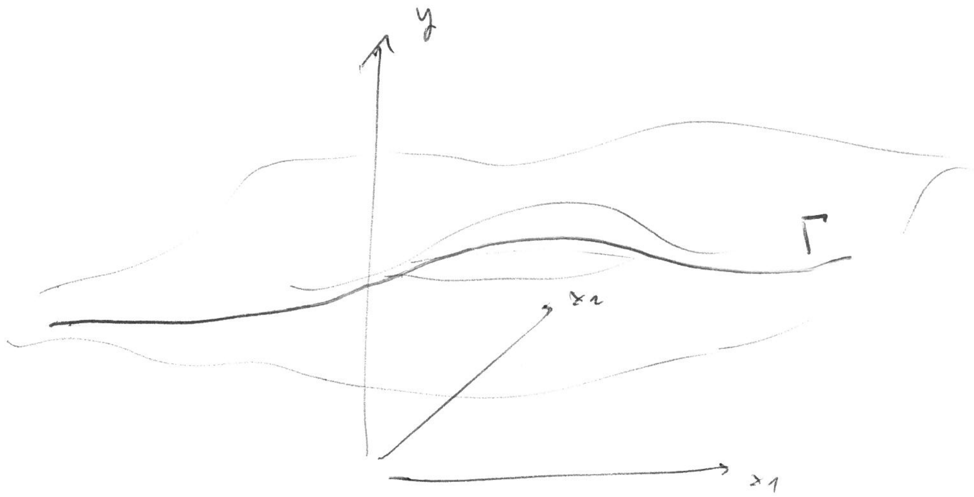
est la même chose que chercher une courbe

$$\Gamma(\gamma) = (x_1(t), \ldots, x_n(t), y(t))$$

telle que le vecteur tangent à Γ, i.e.

$\Gamma'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t), y'(t))$ est tangent au graph de u.

C'est-à-dire, la courbe Γ est contenue dans le graph de la solution u.



<u>Pourquoi</u> ?

Soit $\Sigma = \text{graph}(u)$.

Σ est l'image de l'application

$$(x_1, \ldots, x_n) \xmapsto{\sigma} (x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n))$$

La différentielle de σ est :

$$d\sigma(1, 0, \ldots, 0) = \left(1, 0, \ldots, 0, \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$$
$$d\sigma(0, 1, \ldots, 0) = \left(0, 1, \ldots, 0, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$
$$\vdots$$
$$d\sigma(0, \ldots, 0, 1) = \left(0, \ldots, 0, 1, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

D'autres mots, la matrice Jacobienne de σ est

$$J\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Le plan tangent à Σ ~~dans~~ le point
$P = (x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n))$
est le plan (hyperplan) engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Du coup, trouver une courbe $\Gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t), y(t))$
telle que

$$\left.\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), y(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), y(t)) \\ y'(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t), y(t)) \end{cases}\right\} \text{système de } (n+1) \text{ EDO}$$

nous donne une courbe tangent au $\Sigma = \text{graph}(u)$,

car

$$\Gamma'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f_1(x(t), y(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix} + \ldots + f_n(x(t), y(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Par conséquence à l'équation initiale

$$f_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x,u) \qquad !$$

$\Gamma'(t)$ est combinaison linéaire des vecteurs

$d\sigma(1,\dots,0), \dots, d\sigma(0,\dots,0,1)$

$\Leftrightarrow$ $\Gamma'(t)$ est tangent à la surface

$\Sigma = \text{graph}(u)$.