Exercice Soit $\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$.

On cherche $\gamma(s) = (t(s), x_1(s), \dots, x_n(s))$

telle que $\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x_1'(s) = v_1 \\ \vdots \\ x_n'(s) = v_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t(s) = s + c_0 \\ x_1(s) = v_1 s + c_1 \\ \vdots \\ x_n(s) = v_n s + c_n. \end{cases}$

On peut supposer $c_0 = 0$.

Si $p = (t, x_1, \dots, x_n)$ est donné, p est sur la courbe caractéristique

$\gamma(t) = (s, v_1 s + c_1, \dots, v_n s + c_n)$

où $\begin{cases} s = t \\ v_1 s + c_1 = x_1 \\ \vdots \\ v_n s + c_n = x_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} s = t \\ c_1 = x_1 - v_1 t \\ \vdots \\ c_n = x_n - v_n t \end{cases}$

Du coup,

$$u(t, x_1, \dots, x_n) = u(\gamma(t)) = u(\gamma(0))$$
$$= u(0, c_1, \dots, c_n) = g(c_1, \dots, c_n)$$
$$= g(x_1 - v_1 t, \dots, x_n - v_n t)$$

__Exercice__ Trouver la solution $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

de l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} + (1+x^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

avec condition initiale $u(0,x) = g(x)$.

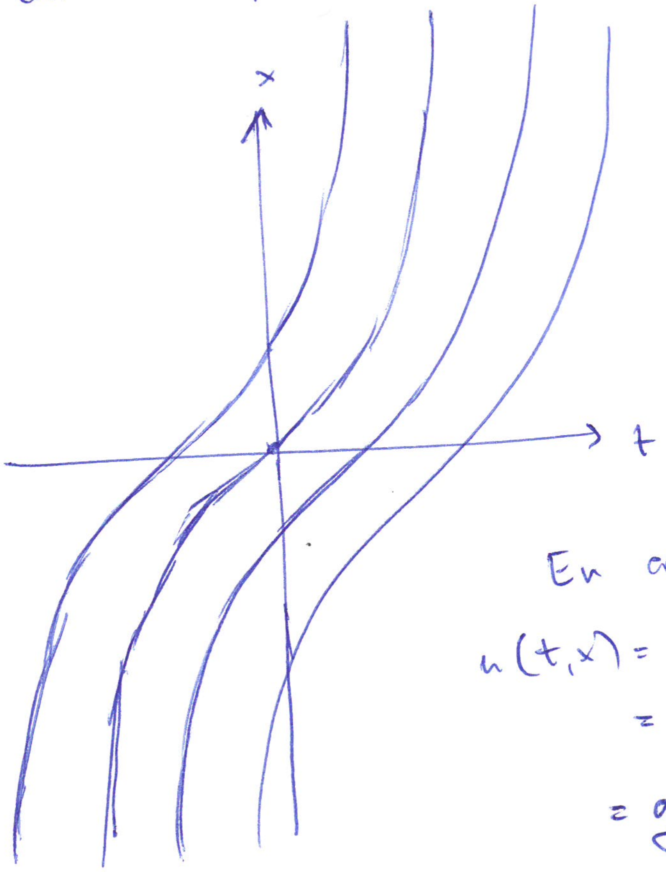
On cherche $\gamma(t) = (t, x(t))$ telle que

$$x'(t) = 1 + x(t)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x'(t)}{1+x(t)^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{x'(t)\,dt}{1+x(t)^2} = \int dt = t + c$$

$$\Rightarrow \arctan(x(t)) = t + c \Rightarrow x(t) = \tan(t+c)$$

Si on appelle $\gamma_c(t) = (t, \tan(t+c))$ les courbes caractéristiques, tout point $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ est sur la courbe caractéristique



$$(t,x) = \gamma_c(t) = (t, \tan(t+c))$$

pour $x = \tan(t+c)$

$$\Rightarrow \arctan(x) = t + c$$

$$\Rightarrow c = \arctan(x) - t$$

En conclusion,

$$u(t,x) = u(\gamma_c(0)) = u(0, \tan(c))$$

$$= g(\tan(c)) = g(\tan(\arctan(x) - t))$$

$$= g\left(\frac{x - \tan(t)}{1 + x\tan(t)}\right).$$

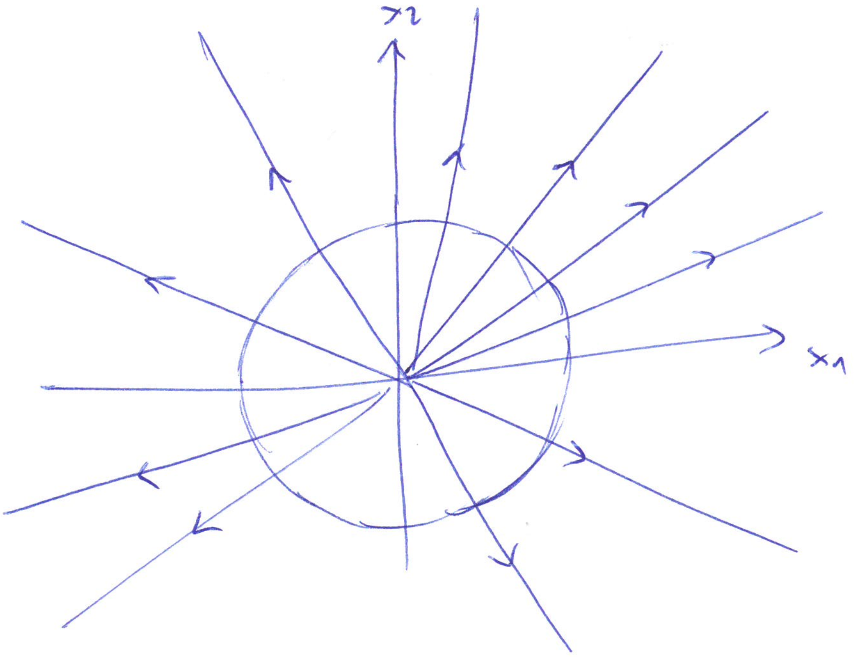
Exercice Trouver la solution $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ du problème $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$

telle que $u(\cos\theta, \sin\theta) = g(\theta)$

pour $g: S^1 \to \mathbb{R}$.

On cherche $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ telle que

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t \\ x_2(t) = c_2 e^t \end{cases}$$



Les courbes caractéristiques sont les demi-droites

$$c_2 x_1 + c_1 x_2 = 0$$

qui partent de l'origine.

Si $p = (x_1, x_2)$, le point p est sur la courbe caractéristique $\gamma_{c_1,c_2}(t) = (c_1 e^t, c_2 e^t)$

pour $c_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $c_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$.

Alors $u(x_1, x_2) = u\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) = g(\theta)$

où $\tan\theta = \frac{x_2/\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{x_1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow u(x_1, x_2) = g\left(\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right).$